

Análise Matemática II

LISTA 8

(1) Ler capítulos 4.1 e 4.2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise em \mathbb{R}^n* .

(2) Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem para as seguintes funções, indicando o respectivo domínio:

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin(xy), & x \neq 0 \\ y^2 - y, & x = 0 \end{cases}$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} x^2 - yx, & y \neq x \\ x, & y = x \end{cases}$$

(3) Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ \sqrt{x^2 + y^2}, & xy \neq 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(b) Prove que não existe $D_v f(0, 0)$, qualquer que seja o vector $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ tal que $v_1 v_2 \neq 0$.

(c) O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f no ponto $(0, 0)$?

(4) Seja $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x, y) = \begin{cases} 0, & xy = 0 \\ x + y, & xy \neq 0 \end{cases}$$

(a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e $D_{(1,1)} f(0, 0)$.

(b) Calcule as funções $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, indicando em que domínio é que estão definidas.

(c) Que pode concluir sobre a diferenciabilidade da função f no ponto $(0, 0)$?

(5) Seja f uma função real diferenciável em \mathbb{R}^2 tal que

$$f(x, y) = f(y, x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Prove que para $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \frac{\partial f}{\partial y}(b, a).$$

(b) Calcule $D_{(1,-1)} f(c, c)$, para $c \in \mathbb{R}$.

(6) Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^4}{x^4 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Estude a continuidade de f .
- (b) Estude a diferenciabilidade de f em $(0, 0)$.
- (c) Calcule o gradiente de f no ponto $(1, 1)$.
- (d) Sendo $u = (-1, 1)$, calcule $D_u f(1, 1)$.

(7) Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^2 - x^3 y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estude f quanto à continuidade e diferenciabilidade.

(8) Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 - x^3 + 2(y - 1)^2 - x^2(y - 1)}{x^2 + (y - 1)^2}, & (x, y) \neq (0, 1) \\ 2, & (x, y) = (0, 1) \end{cases}$$

- (a) Estude a continuidade de f .
- (b) Para o vector $v = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$ calcule $D_v f(0, 1)$.
- (c) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0, 1)$.