Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

1º Semestre 2006/2007

EXAME FINAL 1 Fevereiro 2007

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Rapidez de resolução é um factor a ser testado

(1) Diga, justificando, qual o conjunto dos sublimites da sucessão cujos termos iniciais são: $1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, \ldots$

(2) Calcule

(a)
$$\int \operatorname{tg} x \, dx$$

(b)
$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin t^5 \, dt}{\int_0^{x^2} \sin t^2 \, dt}.$$

(c) O comprimento do gráfico de $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ no intervalo $[-1, 1]$.

(3) Considere a função f diferenciável num intervalo I contendo os pontos -1 e 1, e $\varphi(x) = f(\cos x)\, f(\sin x)$.

(a) Diga qual o domínio de diferenciabilidade de φ e calcule $\varphi'(a)$ para um ponto a que verifique $\operatorname{tg} a = 1$.

(b) Se f é duas vezes diferenciável, quantas raízes tem a função φ''.

(4) Para cada $\alpha, \beta > 0$ calcule (se existir)

$$C(\alpha, \beta) = \sup_{x>0} \frac{x^\alpha}{e^{\beta x}},$$

e use esse resultado para determinar o valor lógico das seguintes proposições:

- $\forall_{\alpha,\beta>0} \exists_{C>0} \forall_{x>0}\ x^\alpha \leq C e^{\beta x}$.
- $\forall_{\alpha>0}\ \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}\, dx$ converge.

(5) Seja $f\colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ tal que

$$f(0) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \qquad \forall_{x \geq 0}\ f'(x) > 0.$$

Mostre que a função inversa f^{-1} existe e é integrável no intervalo $[0, b]$ para qualquer $b > 0$, e que

$$\int_0^{f(x)} f^{-1}(t)\, dt = x f(x) - \int_0^x f(t)\, dt,$$

para todo $x \geq 0$.

Sugestão: Considere a substituição de variáveis $t = f(y)$.

(6) Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ num intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$ diz-se de *variação limitada em* I sse existe $C > 0$ tal que para qualquer partição $\{x_0, \ldots, x_n\}$ do intervalo I verifica-se

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < C.$$

(a) Para $I = [a, b]$ dê um exemplo (justificando) de uma função de variação limitada e de outra que não seja de variação limitada.

(b) Considere as funções f e g de variação limitada em I. Decida se $f + g$ e αf também são de variação limitada em I, onde $\alpha \in \mathbb{R}$.