Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

1º Semestre 2006/2007

EXAME FINAL 17 Janeiro 2007

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Rapidez de resolução é um factor a ser testado

(1) Considere a sucessão u_n cujos termos iniciais são:

$$1, \frac{1}{2}, 2, 1, \frac{1}{5}, 4, 1, \frac{1}{8}, 8, 1, \frac{1}{11}, 16, 1, \frac{1}{14}, 32, \ldots$$

Escreva o termo de ordem geral da sucessão u_n e calcule o conjunto dos sublimites de u_n.

(2) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^x}.$$

(a) Indique a recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$.

(b) Determine $f(\mathbb{R}^+)$ e, se possível, $\min f(\mathbb{R}^+)$ e $\max f(\mathbb{R}^+)$.

(c) Repita a alínea (a) para a função $g = f \circ f$.

(3) Seja $f \in C^1([0,1])$ positiva. Mostre que para qualquer $x \in]0,1]$ existe $c \in]0,x[$ tal que

$$f(x) = f(0)e^{x\frac{f'(c)}{f(c)}}.$$

Sugestão: Use a função auxiliar $h = \log(f)$ em $[0,1]$.

(4) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ mas $f \notin C^1(\mathbb{R})$.

(5) (a) Calcule

$$\int_2^4 \frac{x^3}{x-1}\, dx \quad \text{e} \quad \int \frac{1}{2^x - 8^x} dx$$

(b) Sendo $a > 0$ determine b tal que o integral converge:

$$\int_1^{+\infty} \left| \frac{2x^2 + bx + a}{x(x+a)} - 2 \right| dx.$$

(6) Uma função $f\colon I \to \mathbb{R}$ num intervalo fechado $I \subset \mathbb{R}$ diz-se de *variação limitada em* I sse existe $C > 0$ tal que para qualquer partição $\{x_0, \ldots, x_n\}$ do intervalo I verifica-se

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| < C.$$

(a) Para $I = [0,1]$ dê um exemplo de uma função de variação limitada e de outra que não seja de variação limitada.

(b) Prove que se f é monótona em $I = [a, b]$, então f é de variação limitada em I.