

Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2º Semestre 2006/2007
Época Normal: 4 de Junho de 2007
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. Considere a sucessão u_n cujos termos iniciais são:

$$2, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 0, 2, \frac{1}{4}, \frac{7}{8}, 0, 2, \frac{1}{8}, \frac{11}{12}, 0, 2, \frac{1}{16}, \frac{15}{16}, 0, \dots$$

- (a) Escreva o termo de ordem geral da sucessão u_n e indique o conjunto dos sublimites de u_n .
(b) Sendo $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$, calcule $\text{int}(A)$, $\text{fr}(A)$ e o conjunto dos pontos de acumulação de A .

(2,5) 2. Calcule a área da figura plana limitada pelos gráficos das funções f e g , funções definidas por

$$f(x) = x + 1 \quad \text{e} \quad g(x) = (x - 1)^2.$$

(5,0) 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} \int_0^x \sin(t) dt & \text{se } x > 0 \\ k & \text{se } x = 0 \\ \frac{e^{x/2} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

- (a) Calcule o valor de k de forma a que f seja contínua no ponto $x = 0$.
(b) Mostre que para $x > 0$ é válida a seguinte igualdade: $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$.
(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\exists c \in]2\pi, 4\pi[: f'(c) = 0.$$

(3,5) 4. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \sin(x) - \cos(x)$.

- (a) Mostre que, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 \leq f'(x) \leq \sqrt{2}$.
(b) Utilize o teorema de Lagrange e o resultado da alínea anterior para mostrar que, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$-1 + x \leq f(x) \leq -1 + \sqrt{2}x.$$

(2,5) 5. Estude a convergência do seguinte integral impróprio:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

(2,5) 6. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função tal que

$$\Phi(x) = \int_{-x}^{x^3} f(t) dt.$$

Prove que Φ é crescente em todo o seu domínio.