Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
2ºSemestre 2006/2007
Época de Recurso: 25 de Junho de 2007
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. (a) Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$1+2+3+\ldots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2, \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

(b) Considere o conjunto $A=\left\{\frac{1+(-1)^n n}{2n} : n\in\mathbb{N}\right\}$. Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de A, e, caso existam, o mínimo de A e o máximo A.

(2,5) 2. Prove, utilizando o teorema de Lagrange, que

$$arctg(x)\leq x, \quad \forall x\in[0,+\infty[.$$

(5,0) 3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ função tal que

$$f(x)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}dt & \text{se } x\leq 0\\ 1-\cos(x) & \text{se } x>0\end{cases}$$

(a) Prove que $f\in C^1(\mathbb{R})$.

(b) Estude a monotonia de f em $\mathbb{R}^-$ e indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^-\ x<y\Rightarrow f(x)>f(y).$$

(c) Calcule, ou prove que não existe, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

(2,5) 4. Estude, em função do parâmetro α a convergência do seguinte integral:

$$\int_0^{+\infty}\frac{(1+x)^\alpha}{\sqrt{x}(x^2+1)}dx.$$

(3,5) 5. (a) Determine a área da figura plana limitada pelo gráfico da função $f(x)=\dfrac{cos(x)}{\sqrt{1+sen(x)}}$, pelo eixo das abcissas e pelas rectas de equação $x=0$ e $x=\frac{\pi}{6}$.

(b) Calcule uma primitiva da função $f(x)=\dfrac{2x}{x^2-x-6}$.

(2,5) 6. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função contínua e considere $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que

$$F(x)=\int_0^{x^3-4x} f(t)dt.$$

Justifique que $F\circ F$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e mostre que $(F\circ F)'(2)=-32f(0)^2$.