Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2007/2008
Época de Recurso: 31 de Janeiro de 2008
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(4,0) 1. (a) Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que $7^n - 1$ é um múltiplo de 6, para todo o $n \in \mathbb{N}$.

(b) Sendo $A = \left\{ \dfrac{(-1)^n n^2}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : \ln(1+e^x) > 0\}$ indique o conjunto dos majorantes de A, o seu mínimo (caso exista) e a fronteira de $A \cap B$.

(3,0) 2. (a) Calcule uma primitiva da função $f(x) = \frac{2}{x^3+x}$ que se anule para $x = 1$.

(b) Calcule a área da figura plana limitada pelas rectas de equações $x = 1/2$, $x = 3$, pelo eixo das abcissas e pelo gráfico da função $f(x) = \ln(x)$.

(5,0) 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ e considere $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que tal que

$$g(x) = \begin{cases} \arctan(x) & \text{se } x > 0 \\ x \int_x^0 f(t)dt + kx & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

(a) Calcule o valor de k de forma a que g seja diferenciável no ponto $x = 0$.

(b) Calcule $g'(x)$, para $x \neq 0$ e indique, justificando, se para o valor de k encontrado na alínea anterior se tem $g \in C^1(\mathbb{R})$.

(c) Supondo que $f(x) > 0$ para todo $x < 0$, indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^- \; x \leq y \Rightarrow g(x) \leq g(y).$$

(3,0) 4. (a) Escreva o polinómio de MacLaurin de ordem 2 da função $f(x) = \ln(1+x)$.

(b) Utilize o teorema de Taylor para calcular o seguinte limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x + x^2}{x^2}.$$

(2,5) 6. Estude, em função do parâmetro α, a convergência do seguinte integral impróprio:

$$\int_2^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(x+1)\sqrt{x^2-4}} dx.$$

(2,5) 7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $\mathbb{R}$ e seja ϕ tal que $\phi(x) = \int_0^x f(t)dt$. Prove que se existir $c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ tal que $\phi(c) = 0$ então f tem pelo menos uma raíz real, com o mesmo sinal de c.