ANÁLISE MATEMÁTICA I
EXERCÍCIOS

1. Prove as seguintes proposições:
   (a) $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, 1 + a + a^2 + a^3 + \ldots a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$;
   (b) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
   (c) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 4 + 9 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}, 1 + 8 + 27 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

2. Indique quais das seguintes sucessões são majoradas, minoradas e limitadas:
   (a) $a_1 = 0,\ a_2 = 1,\ a_{n+2} = \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$;
   (b) $a_1 = -1,\ a_{n+1} = -2a_n$;
   (c) $a_1 = 1,\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

3. Seja a_n, uma sucessão monótona e seja b_n, uma sucessão limitada. Prove que se estas sucessões verificarem

$$\forall n \in \mathbb{N}, |a_n - b_n| < \frac{1}{n},$$

   então são ambas convergentes e têm o mesmo limite.

4. Para cada uma das sucessões abaixo indicadas:
   (a) Estude a sucessão quanto à monotonia;
   (b) Calcule o seu limite, caso exista.
      i. $a_n = \frac{2n}{2n-1}$;
      ii. $a_n = \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$;
      iii. $a_n = \frac{2^{n+5}+3^{n-1}}{2^n+3^n}$;
      iv. $a_n = \frac{3^n-2^n}{2^{2n-1}+(-3)^n}$;
      v. $a_n = \frac{3^n+n}{2n}$;
      vi. $a_n = ne^{-n}$;
      vii. $a_n = \frac{n^2-\sqrt{n^2+1}+1}{n^2-1}$;
      viii. $a_n = \frac{c^n}{n!}$, em que c é uma constante positiva;
      ix. $a_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$.

5. Determine os limites das seguintes sucessões, caso existam:
   (a) $a_n = \frac{n \sin n!}{n^2+1}$;

(b) $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$;

(c) $a_n = \frac{n^3-2n^2+1}{n-\ln n}$;

(d) $a_n = e^{\frac{1}{n}} - n^{-\frac{1}{2}} + 2^{-n}$;

(e) $a_n = \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2}\right)$;

(f) $a_n = \frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}$;

(g) $a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;

(h) $a_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$;

(i) $a_n = \frac{1+4+9+\ldots+n^2}{n^3}$

(j) $a_n = \frac{(\sin n)^2}{n+1}$;

(k) $a_n = \frac{n^2+1}{|n^2-1|+3}$;

(l) $a_n = \frac{n+1}{2^n+1} - n$.

6. Determine os limites das seguintes sucessões, caso existam:

(a) $a_n = e^{\frac{n-1}{n+1}}$;

(b) $a_n = \operatorname{cotg}\left(\pi + \frac{1}{n}\right) \operatorname{tg}\frac{1}{n}$;

(c) $a_n = \ln(n^2+1) - \ln(n^2-1)$;

(d) $a_n = \operatorname{arctg}\frac{1+n^2}{1-n^2}$;

(e) $a_n = \cos\left(\frac{\ln n}{n^2+1}\right)$;

(f) $a_n = n^2 \operatorname{tg}\frac{1}{n}$;

(g) $a_n = \ln(n^4-n^3) - \ln(n^2+1)$;

(h) $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$;

(i) $a_n = \sqrt[n]{n}$;

(j) $a_n = \sqrt[n]{n^2+1}$;

(k) $a_n = \left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^n$.

7. Sejam a_n, b_n, sucessões limitadas. Prove as seguintes relações:

(a) $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$;

(b) $\liminf a_n + \liminf b_n \leq \liminf(a_n+b_n) \leq \limsup(a_n+b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$;

(c) Se a_n for convergente e b_n for limitada, então

$$\liminf(a_n+b_n) = \lim a_n + \liminf b_n, \qquad \limsup(a_n+b_n) = \lim a_n + \limsup b_n.$$

8. Indique, justificando, quais das seguintes proposições são verdadeiras:

(a) Se $\lim u_{2n} = a$ e $\lim u_{2n+1} = b$, então a e b são os únicos sublimites de u_n;

(b) Se o conjunto de termos da sucessão não tem máximo nem mínimo, então a sucessão é divergente;

(c) Se a_n for uma sucessão de termos positivos que verifique $\lim a_n = 0$, então a_n é decrescente;

(d) Se as três sucessões a_{2n}, a_{2n+1} e a_{3n} têm limite, então a sucessão a_n tem limite.

9. Dê um exemplo de uma sucessão cujo conjunto de sublimites seja:

   (a) $\{3, 4\}$;

   (b) $\{x : x \in \mathbb{Z} \wedge x < 0\}$;

   (c) $\mathbb{Z}$;

   (d) $[0, 1]$;

   (e) $\mathbb{R}$.

10. Existe alguma sucessão cujo conjunto de sublimites seja $\mathbb{Q}$? Justifique.

11. Prove que qualquer polinómio $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ é uma função contínua e $\mathbb{R}$.

12. Considere funções f, g, de domínio $\mathbb{R}$. Suponha que f é contínua no ponto a e que g é contínua no ponto $f(a)$. Mostre que $g \circ f$ é contínua no ponto a.

13. Mostre que a função $f(x) = \sqrt{x}$ é contínua em todo o seu domínio.

14. Considere a função $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2; \\ a, & x = 2. \end{cases}$$

    Sabendo que f é contínua, determine o valor da constante a.

15. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = 1 + x \sin \frac{1}{x}.$$

    Que valor deve ser atribuído a $f(0)$ de modo a tornar f uma função contínua em $\mathbb{R}$?

16. Considere a função $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \mathrm{arctg} \frac{1}{x-2}.$$

    É possível atribuir algum valor a $f(2)$ de modo que f se torne contínua em $\mathbb{R}$?

17. Seja f, uma função não definida no ponto 0. Escolha um valor para $f(0)$ que torne a função f contínua em cada um dos seguintes casos:

    (a) $f(x) = \frac{(1+x)^n-1}{x}$;

    (b) $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$;

    (c) $f(x) = \frac{\ln(1+x)-\ln(1-x)}{x}$;

    (d) $f(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{x}$.

18. Estude as seguintes funções quanto à continuidade:

    (a) $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$;

    (b) $f(x) = \frac{1+x^3}{1+x}$;

    (c) $f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x^2-4}$;

    (d) $f(x) = \frac{x}{|x|}$;

    (e) $f(x) = (1+x)\mathrm{arctg}\frac{1}{1-x^2}$;

    (f) $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$;

    (g) $f(x) = \frac{1}{1+e^{\frac{1}{1-x}}}$;

    (h) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 3, \\ 2x+1, & x > 3; \end{cases}$

    (i) $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}; \end{cases}$

    (j) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1+x^n}$;

    (k) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (x\mathrm{arctg}(nx))$.

19. Prove que qualquer polinómio de grau ímpar tem pelo menos uma raíz real.

20. Mostre que a função

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

    admite derivada em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Determine a função derivada.

21. Mostre que as seguintes funções não admitem derivadas finitas nos pontos indicados:

    (a) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$, no ponto $x = 0$;

    (b) $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$, no ponto $x = 1$;

    (c) $f(x) = |\cos x|$, nos pontos $x = \frac{2k+1}{2}\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

22. Determine a derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = |x|$;
(b) $f(x) = x|x|$;
(c) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)^5$;
(d) $f(x) = \frac{ax^6+b}{\sqrt{ax^2+b^2}}$;
(e) $f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$;
(f) $f(x) = \frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$;
(g) $f(x) = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$;
(h) $f(x) = x\text{arcsin}x$;
(i) $f(x) = \frac{(1+x^2)\text{arctg}x-x}{2}$;
(j) $f(x) = x^7e^x$;
(k) $f(x) = e^x\text{arcsin}x$;
(l) $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$;
(m) $f(x) = x^3\ln x - \frac{x^3}{3}$;
(n) $f(x) = \frac{1}{x} + 2\ln x - \frac{\ln x}{x}$;
(o) $f(x) = (1 + 3x - 5x^2)^{30}$;
(p) $f(x) = \left(\frac{ax+b}{c}\right)^5$;
(q) $f(x) = (3 - 2\sin x)^5$;
(r) $f(x) = \sqrt{\text{cotg}x} - \sqrt{\text{cotg}\alpha}$;
(s) $f(x) = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x}$;
(t) $f(x) = \sqrt{\frac{3\sin x-2\cos x}{5}}$;
(u) $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^3 x}$;
(v) $f(x) = \sqrt{\text{arctg}x} - (\text{arcsin}x)^3$;
(w) $f(x) = \sin(x^2 - 5x + 1) + \text{tg}\frac{a}{x}$;
(x) $f(x) = \text{arcsin}\frac{1}{x^2}$;
(y) $f(x) = x^2 10^{2x}$;
(z) $f(x) = x\sin 2^x$.

23. Determine a derivadas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \ln^2 x - \ln\ln x$;
(b) $f(x) = \sin^5(5x)\cos^2\frac{x}{3}$;
(c) $f(x) = \frac{x^8}{8(1-x^2)^4}$;
(d) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$;

(e) $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + \frac{18}{7}x\sqrt[6]{x} + \frac{9}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{6}{13}x^2\sqrt[6]{x}$;

(f) $f(x) = \frac{(\mathrm{tg}^2 x - 1)(\mathrm{tg}^4 x + 10\mathrm{tg}^2 x + 1)}{3\mathrm{tg}^3 x}$;

(g) $f(x) = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(h) $f(x) = 3^{\frac{\sin ax}{\cos bx}} + \frac{1}{3}\frac{\sin^3 ax}{\cos^3 bx}$;

(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{3}}{\mathrm{tg}\frac{x}{2} + 2 + \sqrt{3}}$.

24. Qual é o ângulo formado pelo eixo dos xx e a tangente à função $f(x) = x - x^2$ nos pontos de abcissas:

    (a) $x = 0$;

    (b) $x = \frac{1}{2}$;

    (c) $x = 1$.

25. Com que ângulo intersectam o eixo dos xx as curvas $y = \sin x$ e $y = \sin 2x$?

26. Com que ângulo intersecta o eixo dos xx a curva $y = \mathrm{tg}x$?

27. Com que ângulo se intersectam a curva $y = e^{\frac{x}{2}}$ e a recta $x = 2$?

28. Determine os pontos em que rectas tangentes à curva $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 20$ são paralelas ao eixo dos xx.

29. Determine o(s) ponto(s) em que rectas tangentes à curva $y = x^2 + -7x + 3$ são paralelas à recta de equação $5x + y - 3 = 0$.

30. Mostre que a função $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{2}$ satisfaz a equação diferencial $1 + (y')^2 = 2yy''$.

31. Mostre que a função $f(x) = \frac{1}{2}x^2 e^x$ satisfaz a equação diferencial $y'' - 2y' + y = e^x$.

32. Mostre que, quaisquer que sejam as constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$ satisfaz a equação diferencial $y'' + 3y' + 2y = 0$.

33. Mostre que a função $f(x) = e^{-x}\cos x$ satisfaz a equação diferencial $y^{(4)} + 4y = 0$.

34. A função $f(x) = \sqrt[3]{(x-2)^2}$ verifica $f(0) = f(4)$. Esse facto permite concluir que existe um ponto $x \in]0, 4[$ que verifique $f'(x) = 0$? Justifique.

35. Considere a função $f(x) = x(x+1)(x+2)(x+3)$. Prove que a equação $f'(x) = 0$ tem exactamente 3 soluções.

36. Mostre que a equação $e^x = x + 1$ admite uma única solução.

37. Obtenha um majorante para o erro cometido nas seguintes aproximações:

    (a) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}, \qquad |x| < 1$;

    (b) $\sqrt[3]{(1+x)} \approx 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9}, \qquad |x| < 1$;

(c) $e^{\frac{x}{a}} \approx \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}, \qquad |x| << a.$

38. Calcule os seguintes limites, caso existam:

    (a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln x}{\mathrm{cotg} x}$;

    (b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right)$;

    (c) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$;

    (d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$;

    (e) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos x}$;

    (f) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$;

    (g) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln\sin mx}{\ln \sin x}, \qquad m > 0$;

    (h) $\lim\limits_{x\to 1} (1-x)\mathrm{tg}\frac{\pi x}{2}$;

    (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^n \sin\frac{a}{x}, \qquad a \neq 0,\ n > 0$;

    (j) $\lim\limits_{x\to 1^+} \ln x \ln(x-1)$;

    (k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right)$;

    (l) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}$;

    (m) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\frac{3}{4+\ln x}}$;

    (n) $\lim\limits_{x\to 1^-} (1-x)^{\cos\frac{\pi x}{2}}$;

    (o) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$.

39. Determine os intervalos de monotonia e os extremos das seguintes funções:

    (a) $f(x) = x^2(x-12)^2$;

    (b) $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3}$;

    (c) $f(x) = \frac{(x-2)(x-8)}{x^2}$;

    (d) $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$;

    (e) $f(x) = 2\cos\frac{x}{2} + 3\cos\frac{x}{3}$;

    (f) $f(x) = x^2 e^{-x}$.

40. Determine os intervalos da concavidade e os pontos de inflexão das seguintes funções:

    (a) $f(x) = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$;

    (b) $f(x) = x - \sin x$;

(c) $f(x) = (1 + x^2)\, e^x$;

(d) $f(x) = x^2 \ln x$.

41. Determine as assíntotas das curvas:

(a) $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$;

(b) $y = \sqrt{x^2 - 1}$;

(c) $y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$;

(d) $y = \frac{\sin x}{x}$.

42. Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$;

(b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$;

(c) $f(x) = \sqrt{x + 8} - \sqrt{x - 8}$;

(d) $f(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$;

(e) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^4 + 1} - 1}{x^2}$;

(f) $f(x) = (2 + x^2) e^{-x^2}$;

(g) $f(x) = \ln (1 + e^{-x})$;

(h) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$;

(i) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$;

(j) $f(x) = \frac{1}{\sin x + \cos x}$;

(k) $f(x) = \sin x \sin 2x$;

(l) $f(x) = \arcsin \left(1 - \sqrt[3]{x^2}\right)$;

(m) $f(x) = \frac{\mathrm{arcsin} x}{\sqrt{1 - x^2}}$;

(n) $f(x) = \arcsin \ln (x^2 + 1)$;

(o) $f(x) = x^x$;

(p) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$.

43. Determine as primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = x(x + a)(x + b)$;

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$;

(c) $f(x) = (\sqrt{x} + 1)\,(x - \sqrt{x} + 1)$;

(d) $f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 - 2)}{\sqrt[3]{x^2}}$;

(e) $f(x) = \frac{(x^m - x^n)^2}{\sqrt{x}}$;

(f) $f(x) = \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{x}\right)^4}{\sqrt{ax}}$;

(g) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$;

(h) $f(x) = 3^x e^x$;

(i) $f(x) = \frac{a}{a-x}$;

(j) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$;

(k) $f(x) = \frac{x^2+5x+7}{x+3}$;

(l) $f(x) = \frac{x^4+x^2+1}{x-1}$;

(m) $f(x) = \left(a + \frac{b}{x-a}\right)^2$;

(n) $f(x) = \sqrt{a-bx}$;

(o) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

(p) $f(x) = \frac{\sqrt{x}+\ln x}{x}$;

(q) $f(x) = \frac{x+3}{7-5x^2}$;

(r) $f(x) = \sqrt{\frac{\mathrm{arcsin} x}{1-x^2}}$;

(s) $f(x) = \frac{\mathrm{arctg}\frac{x}{2}}{4+x^2}$;

(t) $f(x) = \frac{x-\sqrt{\mathrm{arctg} 2x}}{1+4x^2}$;

(u) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}}$;

(v) $f(x) = \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)^2$;

(w) $f(x) = \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}$;

(x) $f(x) = e^{-(x^2+1)} x$;

(y) $f(x) = \frac{5^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$;

(z) $f(x) = e^x\sqrt{a-be^x}$.

44. Determine as primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{\mathrm{tg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{\sin x \cos x}$;

(c) $f(x) = \sqrt{1+3\cos^2 x}\,\sin(2x)$;

(d) $f(x) = \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}$;

(e) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x\sqrt{4-\mathrm{tg}^2 x}}$;

(f) $f(x) = e^{\sin^2 x}\sin(2x)$;

(g) $f(x) = \frac{1}{x(4-\ln^2 x)}$;

(h) $f(x) = \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}$;

(i) $f(x) = \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}$;

(j) $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}$;

(k) $f(x) = \frac{1}{1+\cos^2 x}$;

(l) $f(x) = \sqrt{\frac{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{1+x^2}}$.

45. Determine as primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \ln x$;

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$;

(c) $f(x) = x \sin x$;

(d) $f(x) = x 2^{-x}$;

(e) $f(x) = x^2 e^{3x}$;

(f) $f(x) = (x^2 - 2x + 5)e^{-x}$;

(g) $f(x) = x \sin x \cos x$;

(h) $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$;

(i) $f(x) = x^n \ln x, \qquad n \in \mathbb{Z}$;

(j) $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$;

(k) $f(x) = \frac{x}{\sin^2 x}$;

(l) $f(x) = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}$;

(m) $f(x) = \sin \ln x$;

46. Determine as primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2((x-2)^2+1)}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{(x^2+2)^3}$;

(c) $f(x) = \frac{x^5}{x^4+4}$;

47. Determine as primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-2}}$;

(b) $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$;

(c) $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$;

(d) $f(x) = \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$;

(e) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{2x+1}}$;

(f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$;

(g) $f(x) = \frac{\ln(2x)}{x\ln(4x)}$;

(h) $f(x) = \frac{(\text{arcsin}x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

(i) $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}$;

(j) $f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos x}$;

(k) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$;

(l) $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$;

(m) $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$;

(n) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-5}}{x}$;

(o) $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$;

48. Determine as primitivas das seguintes funções:

(a) $f(x) = x^3 e^{-x^2}$;

(b) $f(x) = e^{\sqrt{x}}$;

(c) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\ln x$;

(d) $f(x) = x \ln \frac{1-x}{1+x}$;

(e) $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2$;

(f) $f(x) = \frac{\ln \ln x}{x}$;

(g) $f(x) = x^2 \text{arctg}(3x)$;

(h) $f(x) = x(\text{arctg}x)^2$;

(i) $f(x) = \frac{\text{arcsin}x}{x^2}$;

(j) $f(x) = \frac{\text{arcsin}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}$;

(k) $f(x) = x\text{tg}^2(2x)$;

49. Considere duas funções integraveis $f, g : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.
Mostre que a função $x \mapsto f(x)g(x)$ é integravel no intervalo $[a, b]$.

50. Sejam: $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, uma função contínua e $g : [a, b] \mapsto [0, +\infty[$, uma função integravel.

(a) Mostre que existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c) \int_a^b g(x)dx.$$

(b) O resultado ainda é válido se g tomar valores positivos e negativos? Justifique.

51. Considere uma função contínua $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, tal que $\int_a^b f(x)dx = 0$.
Mostre que a equação $f(x) = 0$ admite pelo menos uma raíz no intervalo $]a, b[$.

52. Considere a função $F :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x e^{\frac{t^2+1}{t}} \frac{1}{t} dt.$$

Mostre que para todo $x > 0$ se verifica $F\left(\frac{1}{x}\right) = -F(x)$.

53. Considere a função $\varphi :]0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(x) = \int_1^x \frac{t}{(1+t^2)^2} dt.$$

(a) Calcule $\varphi(2)$;

(b) Mostre que φ é diferenciavel e calcule $\varphi'(x) \quad x > 0$;

(c) Estude φ quanto ao crescimento e mostre que existe um único ponto $c > 0$ que verifica $\varphi(c) = 0$.

54. Sejam $u, v : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, funções contínuas, $a, b \in \mathbb{R}$ constantes e suponha que para todo $x \in \mathbb{R}$ se verifica a igualdade

$$\int_a^x u(t)dt = \int_b^x v(t)dt.$$

Mostre que $u = v$ e que $\int_a^b u(t)dt = 0$.

55. Seja $\varphi : \mathbb{R} \mapsto]0, +\infty[$ e seja

$$\psi(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Estude o sinal de ψ.

(b) Mostre que ψ é derivavel e calcule ψ'.

(c) Mostre que ψ é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$.

(d) Mostre que ψ tem um mínimo global e verifica

$$\min_{x\in\mathbb{R}} \psi(x) \leq \frac{1}{4} \max_{x\in[0,1]} \varphi(x).$$

56. Seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, uma função contínua e seja $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \mapsto \mathbb{R}$, a função definida por

$$g(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t)dt.$$

(a) Determine $\lim_{x\to 0} g(x)$.

(b) Prove que g é constante em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ se e só se f for constante.

(c) Prove que o contradomínio de g está contido no contradomínio de f.

(d) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, dê um exemplo de uma função f contínua em $\mathbb{R}$, sem limite quando $x \to +\infty$, tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \alpha$.

57. Uma função $f : [-a, a] \mapsto \mathbb{R}$ diz-se **ímpar** se verificar

$$f(-x) = -f(x), \qquad \forall x \in [-a, a],$$

diz-se **par** se verificar

$$f(-x) = f(x), \qquad \forall x \in [-a, a],$$

(a) Mostre que, se f for integravel, então

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx \qquad \text{se } f \text{ for par;}$$
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \qquad \text{se } f \text{ for ímpar.}$$

(b) Calcule os seguintes integrais:

i. $\int_{-2}^{2} \frac{\sin x}{1+x^8} dx$;

ii. $\int_{-1}^{1} |x| dx$;

iii. $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \cos \ln \frac{1+x}{1-x} dx$.

58. Supondo que f e g são funções contínuas, prove as seguintes igualdades:

(a) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(a+b-x)dx$;

(b) $\int_0^t f(x)g(t-x)dx = \int_0^t g(x)f(t-x)dx$;

(c) $\int_0^1 \frac{1}{\text{arccos} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx$.

59. Calcule os seguintes limites

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} \int_1^x \frac{\ln t}{1+t} dt$;

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-e^{x^2}} \int_0^x e^{t^2} dt$.

60. Determine o sinal do integral $\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx$.

61. Calcule os seguintes integrais:

(a) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-25} dx$;

(b) $\int_2^4 \frac{x^3}{x-1} dx$;

(c) $\int_{\frac{1}{2}}^{e} x \ln x dx$;

(d) $\int_0^2 |1-x| dx$;

(e) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5}dx$;

(f) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

(g) $\int_{\frac{3}{4}}^{\frac{4}{3}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx$;

(h) $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$;

(i) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$;

(j) $\int_0^{\pi} \frac{1}{3+2\cos t}dt$;

(k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+a^2\sin^2 t}dt$;

(l) $\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$;

(m) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{x^2+5x+1}}dx$;

(n) $\int_0^{2\pi} \frac{}{5-3cosx}dx$;

62. Calcule a área limitada pelas curvas de equações:

(a) $y=9-x^2$ e $y=x^2$;

(b) $y^2=-4(x-1)$ e $y^2=-2(x-2)$;

(c) $y=x^4-4x^2$ e $y=\sqrt{4-x^2}$;

(d) $x^2y=1$, $y=-27x$ e $x=-8y$;

(e) $xy=1$, $y(x^2+1)=x$, $x=1$ e $y=2x$;

(f) $x=0$, $x=\pi$, $y=\sin x$ e $y=\sin 2x$;

63. Determine a derivada de cada uma das seguintes funções:

(a) $f(x)=\int_x^{x^2} e^{-t^2}dt$;

(b) $f(x)=\int_{\frac{1}{x}}^{\sqrt{x}} \cos(t^2)dt$;

64. Calcule os seguintes limites, caso existam

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{1}{\cos\frac{x}{n}+x^2}dx$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$, em que

$$f_n(x)=\begin{cases} xn^2, & \text{se } x\in\left[0,\frac{1}{n}\right]; \\ 2n-xn^2, & \text{se } x\in\left[\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right]; \\ 0, & \text{se } x\in\mathbb{R}\setminus\left[0,\frac{2}{n}\right]. \end{cases}$$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 n(1-x)^n \sin x dx$.

65. Sendo $f_n(x) = nxe^{-x^2}, \; x \in \mathbb{R}, \; n \in \mathbb{N}$, mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

66. Sejam f, g, funções integraveis no intervalo $[a, b]$. Prove que é válida a desigualdade de Cauchy-Schwartz:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \int_a^b g(x)^2 dx.$$

67. Seja $f_n : [a, b] \mapsto \mathbb{R}, \;\; n \in \mathbb{N}$, uma sucessão de funções convergindo uniformemente para a função integravel $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$. Mostre que

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(f_n(x) - f(x) \right)^2 dx = 0.$$

68. Calcule os seguintes integrais:
    (a) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx$;
    (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln x} dx$;
    (c) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$;
    (d) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$;
    (e) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$;
    (f) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{cotg} x dx$;
    (g) $\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

69. Determine a natureza dos integrais:
    (a) $\int_0^{+\infty} \sin 3x dx$;
    (b) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-3} dx$;
    (c) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-4} dx$;
    (d) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{x^\alpha} dx$;
    (e) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha + x^\beta} dx$;
    (f) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x} + 2\sqrt[4]{x} + x^2} dx$;
    (g) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x + \sqrt[3]{x^2+1} + 5} dx$;
    (h) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + \sqrt[3]{x^4+1}} dx$;
    (i) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} dx$;

(j) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^4}} dx$;

(k) $\int_{0,2} \frac{1}{\ln x} dx$;

(l) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx$

70. A função Gamma de Euler é definida pela expressão

$$\Gamma(t) = \int_0^{+\infty} x^{t-1} e^{-x} dx.$$

Prove que $\Gamma(t)$ está definida para todo $t \in]0, +\infty[$.