Análise Matemática II

LISTA 10

(1) Ler capítulos 4.3, 4.4 e 4.5 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise em* $\mathbb{R}^n$.

(2) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$ e $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $g(x, y) = f(x + \lambda y) + f(x - \lambda y)$, para $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Prove que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0.$$

(3) Sejam $f, g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$h(x, y) = f(xy) - g\left(\frac{y}{x}\right).$$

Mostre que

$$y^2\frac{\partial^2 h}{\partial y^2} - x^2\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = x\frac{\partial h}{\partial x} - y\frac{\partial h}{\partial y}.$$

(4) Escreva a fórmula de Taylor de ordem 1 com resto de Lagrange para:
(a) $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ em $(0, 0)$.
(b) $f(x, y) = \dfrac{y}{y + x}$ em $(1, 0)$.

(5) Indique os pontos onde o Jacobiano não se anula, o conjunto $f(S)$ e, se possível, f^{-1} para:
(a) $f(x, y) = (x + 2y, x - y)$, $S = \mathbb{R}^2$.
(b) * $f(x, y) = (x^2 - y^2, xy)$, $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
(c) * $f(x, y) = (\log(xy), (x^2+y^2)^{-1})$, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 < y < x\}$.

(6) Seja o conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| = 1\}.$$

Usando o teorema da função implícita, determine quais os pontos de A para os quais y pode ser expresso em função de x. Analise os restantes pontos.

(7) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y).$$

Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1, 1, 0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ é o gráfico de uma função $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

(8) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(0) \neq 0$, mas não é invertível numa vizinhança de 0. Explique porque é que este exemplo não contradiz o teorema da função inversa.

(9) Seja $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x,y) = (u,v)$ onde

$$\begin{cases} u = x - y + \log(1 + xy) \\ v = x + y - x^2y^2. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(0,0)$ onde f é um C^∞-difeormorfismo. Calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(0,0)$.

(10) Determine os extremos das seguintes funções:

(a) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^y$

(b) $f(x,y) = x^2 + 4xy - y^2 - 8x - 6y$

(c) $f(x,y,z) = xy + xz$

(d) $f(x,y) = x\sin(y)$

(e) $f(x,y) = x^2 - 3xy^2 + 2y^4$

(11) Decida se $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 0)$ é extremante da função

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2x + y^4 + z^2.$$

(12) Determine e classifique os pontos críticos de

(a) $f(x,y,z) = \dfrac{x^2 - \alpha y^2 + x}{1 + z^2}$, com $\alpha \neq 0$.

(b) $f(x,y,z) = xy + xz - x^3 - y^2 - \beta x$.

(c) $f(x,y) = e^{xy + xy^2 + x^2}$.

(13) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = (x - y)^2 - x^4 - y^4.$$

(a) Prove que os pontos críticos são $(1,-1), (-1,1)$ e $(0,0)$.

(b) Indique se os pontos $(1,-1)$ e $(-1,1)$ são extremantes.

(c) Prove que o ponto $(0,0)$ não é extremante.