Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão
Análise Numérica

Prova de Avaliação por Exame Final 13/7/2000

---

1. Considere a seguinte matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) Utilizando uma factorização adequada, escreva a matriz A como produto de uma matriz triangular inferior por uma matriz triangular superior.

(b) **Utilizando essa factorização** resolva o sistema $A\,x = (1\ 0\ 1)^T$.

(c) Também com base no resultado da alínea (a), calcule o determinante e a matriz inversa de A.

2. Considere a seguinte tabela de valores de uma função:

x_i	1.0	1.2	1.5	2.0
f_i	3.0	3.4	4.027	5.887

(a) Determine o polinómio de grau ≤ 3 que interpola f em todos os pontos da tabela. Assumindo que $|f^{(4)}(x)| \leq M, \quad x \in [1,2]$, determine um majorante para o erro cometido ao usar este polinómio no cálculo aproximado de $f(1.4)$.

(b) Verifique se a função definida por

$$\begin{cases} 2x+1, & x \in [1, 1.2[\\ 2x+1+(x-1.2)^3, & x \in [1.2, 1.5[\\ 2x+1+(x-1.2)^3+(x-1.5)^3+(x-1.5)^2, & x \in [1.5, 2] \end{cases}$$

é um *spline* cúbico interpolador da função f nos pontos indicados.

3. Seja $f : [0, +\infty[\to I\!R$ uma função de classe C^∞ que verifica

$$|f^{(m)}(x)| \leq 1, \;\; x \in I\!R, \;\; (m = 0, 1, 2, \cdots),$$

Para cada valor fixo de h, seja p_n o polinómio interpolador de f nos pontos $0, h, 2h, \cdots, hn$. Para que valores de h podemos garantir que $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = f(x)$, qualquer que seja $x > 0$?

(Note que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \to \infty$).

Cotação: **1.**(a)1.5 (b)1.5 (c)1.5 ; **2.**(a)1.0 (b)1.0 ; **3.**2.0

4. Pretende calcular-se uma aproximação do integral $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, utilizando o método dos trapézios.

(a) Determine uma constante $M > 1$ tal que $\int_M^{+\infty} e^{-t^2}\,dt < 10^{-5}$.

(b) Calcule aproximações do integral, aplicando o método dos trapézios no intervalo $[0, M]$, com $h = M/2, M/4, M/8$. (**Nota**: se não tiver resolvido a alínea (a), pode usar $M = 4$).

(c) Determine um majorante para o erro total cometido ao aproximar o integral impróprio.

5. Pretende construir-se uma fórmula de quadratura para aproximar integrais do tipo $I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, com f função contínua. Determine a, A_0, A_1, A_2 de modo que a regra de quadratura

$$Q(f) = A_0 f(-a) + A_1 f(0) + A_2 f(a), \quad a > 0$$

seja exacta para polinómios de grau o maior possível. Indique ainda o grau da quadratura obtida.

6. Considere a seguinte equação não linear: $x^2 - \sin^2(1 + x) = 0$.

(a) Prove que qualquer raíz da equação anterior é, em módulo, menor que 1.

(b) Sabendo que em $[0, 1]$ existe uma única raíz, α, da equação mostre que o método iterativo definido por

$$\begin{cases} x_0 = 1 \\ x_{n+1} = \dfrac{x_n + \sin(x_n + 1)}{2} \end{cases}$$

converge para α.

(c) Demonstre que o método descrito na alínea anterior converge linearmente.

7. Considere a seguinte equação diferencial de 1ª ordem

$$y'(t) = 1 + t + 3y(t), \quad y(0) = 0, \quad 0 \le t \le 1$$

(a) Mostre que existe uma e uma só solução para a equação diferencial dada.

(b) Obtenha um valor aproximado y_2 para $y(0.2)$, usando o método de Euler com passo $h = 0.1$.

(c) Recorrendo a um resultado teórico, deduza um majorante para $|y(0.2) - y_2|$.

Cotação: **4.**(a)1.0 (b)1.0 (c)1.0 ; **5.** 2.0 ; **6.**(a)0.5 (b)1.5 (c)1.0 ; **7.**(a)1.0 (b)1.0 (c)1.5