

Licenciatura em Matemática Aplicada à Economia e à Gestão Análise Numérica

Prova de Avaliação em Época Especial

16/11/2000

1. Seja A uma matriz quadrada, de dimensão n , com a forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Determine os números de condição $\text{cond}_1(A)$ e $\text{cond}_\infty(A)$. [2.0]

- (b) Sejam b_1 e b_2 vectores de \mathbb{R}^n tais que $\frac{\|b_1 - b_2\|_\infty}{\|b_1\|_\infty} \leq 10^{-5}$.

Sejam ainda x_1 e x_2 as soluções dos sistemas lineares $Ax = b_1$ e $Ax = b_2$, respectivamente. Determine um majorante para $\frac{\|x_1 - x_2\|_\infty}{\|x_1\|_\infty}$, no caso de $n = 20$. Comente. [2.0]

2. Seja A uma matriz invertível que admite uma factorização LDL^T (L triangular inferior com 1's na diagonal e D matriz diagonal). Em que condições poderá esta factorização coincidir com a decomposição em valores singulares da matriz A ? [2.0]

3. Seja $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ que verifica

$$|f^{(m)}(x)| \leq 1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (m = 0, 1, 2, \dots).$$

Para cada valor fixo do parâmetro h , seja p_n o polinómio interpolador de f nos pontos $0, h, 2h, \dots, hn$. Para que valores de h podemos garantir que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(x) = f(x)$, qualquer que seja $x > 0$?

(Note que $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$, $n \rightarrow \infty$). [2.0]

4. Considere a seguinte tabela de valores de uma função f

x_i	0.2	0.34	0.4	0.52	0.6	0.72
f_i	0.16	0.22	0.27	0.29	0.32	0.37

- (a) Calcule valores aproximados de $f(0.47)$, usando polinómios interpoladores de grau 2 e 3. [1.5]
- (b) Admitindo que $f \in C^4[0, 1]$, calcule majorantes para o erro cometido nas aproximações obtidas na alínea anterior. [1.5]

5. Considere o integral $I = \int_{0.5}^b (x^2 - \ln x) dx$, $b \in [0.5, +\infty[$.

Utilizando a regra dos trapézios com 8 subintervalos, qual o maior valor de b para o qual se pode garantir o cálculo de um valor aproximado de I com, pelo menos, 3 casas decimais significativas? [2.0]

6. A equação $x^2 - 4 + \sin x = 0$ tem uma única raiz no intervalo $[1, 2]$. Verifique que a função iteradora definida por $g(x) = \sqrt{4 - \sin x}$ permite obter uma sucessão convergente para essa raiz. [2.0]
7. Seja $a > 0$ e $f, g : [-a, a] \rightarrow [-a, a]$ funções reais de classe C^1 verificando $|f'(x)| + |g'(x)| < 1$, $\forall x \in [-a, a]$. Considere o sistema (em geral não linear)

$$\begin{cases} x = f\left(\frac{x+y}{2}\right) \\ y = g\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases}$$

- (a) Mostre que este sistema tem uma única solução em $[-a, a] \times [-a, a]$. [1.5]
- (b) Seja $a = 1$, $f(0) = 1$, $g(0) = 1$ e $f(1) = 1$. Determine o valor exacto da solução do sistema. [1.0]

8. Considere a seguinte equação diferencial de 2ª ordem

$$\begin{cases} y''(x) + 2y'(x) + y(x) = e^x, & 0 \leq x \leq 1. \\ y(0) = 1, & y'(0) = -1 \end{cases}$$

- (a) Obtenha um valor aproximado para $y(0.2)$ e para $y'(0.2)$, usando o método de Euler com passo $h = 0.1$. [1.5]
- (b) Sabendo que $\max_{x \in [0, 0.2]} |y''(x)| \leq 2.2$ e que $\max_{x \in [0, 0.2]} |y^{(3)}(x)| \leq 2.7$, deduza um majorante para o erro cometido. [1.0]