Análise Matemática II

LISTA 6

(1) Considere

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ xy > 1\}.$$

(a) Dê um exemplo de uma sucessão de pontos em X que convirja para um ponto fora de X.

(b) Poderia encontrar uma sucessão de pontos que não pertencem a X convergente para um ponto de X?

(2) Ler capítulo 3.2 de Campos Ferreira, *Introdução à Análise Matemática*

(3) Calcule ou prove que não existem os seguintes limites:

(a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y^2}{x-y}$

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{x+y-2}{xyz}$

(d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5}{x^8+(y-x^2)^2}$

(e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^3+y-1}{3x^3+y^3-1}$

(f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{\log^2(x+y)}{\sin(\log(x+y))}$

(4) Seja $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = \frac{x^2}{x+y}.$$

(a) Determine o domínio D de f.

(b) Para cada $m \in \mathbb{R}$ e cada $k \in \mathbb{N}$ seja

$$A_{k,m} = \{(x, y) \in D \colon\ y = mx^k\}.$$

Calcule, para cada par $(k, m) \neq (1, -1)$ o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto $A_{k,m}$.

(c) Considere o conjunto

$$B = \{(x, y) \in D \colon\ y = -x + x^2\}$$

e calcule o limite de f no ponto $(0, 0)$ relativo ao conjunto B.

(d) Que pode concluir sobre a existência de limite de f no ponto $(0, 0)$?

(5) Determine $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que f tenha limite no ponto $(1,1)$, onde

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y} + \alpha, & \text{se } x \geq 0,\ y \geq 0 \text{ e } y \neq x \\ \frac{x^2+1}{y^2+1} - \alpha, & \text{c.c.} \end{cases}$$

(6) Mostre que não existe

$$\lim_{(x,y,z)\to(1,1,0)} \frac{z+(x-1)z+z^2}{1-xy+zx}.$$

(7) Considere a função $f(x,y) = x\log(xy)$.

(a) Determine o domínio D de f e indique, se possível, uma sucessão no domínio de f cujo limite não pertence ao domínio de f.

(b) Mostre que para qualquer semirecta S colocada na origem e contida no domínio de f, o valor do limite de f na origem relativo ao conjunto S é sempre o mesmo.

(c) Prove que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

Sugestão: Estude o limite relativo ao conjunto

$$\{(x,y) \in D\colon\ y = e^{-\frac{1}{x^2}}\}.$$