Análise Matemática III

LISTA 8

(1) Prove que qualquer intervalo e qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ com $m(A) = 0$ são mensuráveis à Lebesgue.

(2) (Conjunto não mensurável à Lebesgue) Para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, considere o conjunto $A_\alpha = \alpha + \mathbb{Q}$.

(a) Determine $\cup_{\alpha \in \mathbb{R}} A_\alpha$ e $m(A_\alpha)$.

(b) Mostre que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ sse $A_\alpha \neq A_\beta$ sse $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$.

(c) *Considere o conjunto $E \subset [0, 1]$ constituído por um único elemento a_α de cada A_α distinto[1]. Seja então $E_n = (q_n + E) \cap [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, onde q_n representa uma sucessão que ordena os racionais.

(i) Determine $\cup_n E_n$, $m(\cup_n E_n)$ e $m(E_n) - m(E)$.

(ii) Mostre que $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$.

Sugestão: Suponha que existe $x \in E_i \cap E_j$.

(iii) Calcule $\sum_n m(E_n)$ e compare com $m(\cup_n E_n)$. Conclua que E não é mensurável à Lebesgue, i.e. $E \notin \mathcal{M}$.

(3) (Conjunto de Cantor dos terços) Considere $A_0 = [0, 1]$. Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio $I_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Obtemos assim $A_1 = I_0 \cup I_2$ onde $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$. Repita o processo para I_0 e I_2, obtendo $A_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ onde $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, etc. Continuando, temos uma sucessão de conjuntos A_n.

(a) Prove que o chamado conjunto de Cantor dos terços $A = \cap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ é não vazio.

(b) Prove que A tem medida de Lebesgue nula.

(c) *Prove que A não é numerável.

Sugestão: Escreva $x \in [0, 1]$ na base 3 na forma $x = (0.a_1 a_2 \dots)_3$ onde

$$x = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k}$$

e $a_k \in \{0, 1, 2\}$. Note que $x \in A$ sse $a_k \in \{0, 2\}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.

(4) *Mostre que $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ e $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ têm a mesma cardinalidade. *Sugestão*: Use o facto de o conjunto de Cantor ter a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$ e medida de Lebesgue nula.

[1]Este conjunto existe pela aplicação do axioma da escolha.

(5) Mostre que

  (a) se $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{P}$, então $\sigma(\mathcal{A}_1) \subset \sigma(\mathcal{A}_2)$.

  (b) $\sigma(\sigma(\mathcal{A})) = \sigma(\mathcal{A})$ para qualquer $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}$.

  (c) $\mathcal{A} = \{[a, +\infty[\colon a \in \mathbb{R}\}$ gera a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

(6) Seja $\Omega = \{0,1\}^n \subset \mathbb{R}^n$, i.e. os elementos de Ω são vectores em $\mathbb{R}^n$ com componentes 0 ou 1. Considere a medida $\mu\colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ definida para cada $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$ por $\mu(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}$.

Dados $a_1, \dots a_m \in \{0,1\}$ com $1 \leq m \leq n$, definimos

$$A_{a_1,\dots,a_m} = \{\omega \in \Omega\colon \omega_i = a_i,\ i = 1, \dots, m\}$$

e $\mathcal{A}_m = \{A_{a_1,\dots,a_m}\colon a_i \in \{0,1\}\}$.

  (a) Mostre que μ é uma medida de probabilidade.

  (b) Calcule $\mu(A_{a_1,\dots,a_m})$.

  (c) Determine a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_2$.

  (d) Qual é o cardinal da σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_m$?

(7) Dê um exemplo em $\mathbb{R}^2$ de um conjunto limitado de medida de Lebesgue nula cuja fronteira não tenha medida nula.