Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

# Análise Matemática II – 1º ano MAEG

2º Semestre 2008/2009

## EXAME FINAL 3 Junho 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Para cada $x \in \mathbb{R}$ considere a série

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(x-1)^2}{n^2(x^2+n^2)}.$$

(a) Determine o domínio de $S$ e mostre que é uma função contínua.

(b) Prove que é uma função diferenciável e calcule $S'$.

(2) Calcule

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n}{2^n} \quad \text{e} \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{\ldots}}}}$$

(3) Seja $f\colon [0,4\pi] \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t).$$

(a) Esboce o gráfico de $f$.

(b) Calcule a derivada de $f$ e de $g \circ f$ em $\pi$, onde

$$g(x,y) = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2}+xy\right), \cos\left(\frac{\pi}{2}+xy\right)\right).$$

(4) Considere
$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{xy-1}}.$$

(a) Indique o domínio de $f$ e os pontos onde é contínua. Consegue prolongar $f$ por continuidade a algum ponto fronteiro ao seu domínio?

(b) Determine o contradomínio de $f$.

(5) Considere a função $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por
$$g(x,y) = \left(e^{-xy^2}, \sin(x+y)\right).$$

(a) Determine o domínio de diferenciabilidade e a matriz jacobiana de $g$.

(b) Mostre que $D_v g(0,\pi) \neq (0,0)$ para qualquer vector $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

(6) Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Sabendo que para cada $n \in \mathbb{N}$ temos
$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1+n^2}{n^2},$$
determine
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$
*Sugestão:* Utilize a definição de derivada parcial num ponto.