Análise Matemática III

LISTA 9

(1) Indique se, para uma função mensurável f, o conjunto de nível $f^{-1}(\{a\})$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(2) Considere a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue em $\mathbb{R}$. Determine se qualquer função monótona $f\colon A \to \mathbb{R}$ com $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, é mensurável.

(3) Seja $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Considerando a função $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(x) = m\left(\{y \in [0,1]\colon f(y) > x\}\right),$$

determine:

(a) a monotonia de ω.
(b) se ω é uma função mensurável.
(c) $\lim_{x\to+\infty} \omega(x)$.
(d) $\lim_{x\to-\infty} \omega(x)$.
(e) $\lim_{x\to a^+} \omega(x)$.
(f) $\lim_{x\to a^-} \omega(x)$.
(g) se $m(f^{-1}(\{a\})) = 0$ implica que ω é contínua em a.

(4) * Repita o exercício anterior para uma função $f\colon E \to \mathbb{R}$ limitada e mensurável à Lebesgue com $E \in \mathcal{M}$ tal que $m(E) < +\infty$.

(5) Indique quais as funções simples [1]:

(a) $f = \chi_{[1,+\infty[} + \chi_{]-\infty,-1[}$
(b) $f = 2\chi_{[0,+\infty[} - 3\chi_{]1,+\infty[}$
(c) $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
(d) $f(x) = \begin{cases} x, & x^{-1} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

[1]Note que $[x]$ é a parte inteira de x, i.e. $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z}\colon k \leq x\}$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1/2,\ 0 \le y \le 1 \\ -3, & 1/2 < x < 1,\ 0 \le y \le 1/2 \\ 2, & 1/2 < x < 1,\ 1/2 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

(f) $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k k^{-1} \chi_{]0,1/k[}$

(g) $f(x) = [x]\chi_{[-100,100]}$

(h) $f(x,y) = ([x] + [y])\chi_{[0,2]\times[0,2]}(x,y)$

(i) $f(x,y) = \left(\left[\frac{3}{1+x}\right] \chi_{]0,2[}(y) - \left[\frac{2}{1+y}\right] \chi_{]0,3[}(x) \right) \chi_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y)$

(6) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida onde μ é a medida de contagem. Seja $A = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \Omega$ e $f \ge 0$ uma função mensurável. Decida se $\mathcal{X}_A\, f$ é uma função simples.