



Este exame é composto por duas partes. Esta é a 1ª Parte — Teórica (Cotação: 8 valores). As respostas às questões de escolha múltipla são efectuadas na correspondente folha de resposta anexa, que será recolhida 40 minutos após o início da prova. As outras questões devem ser respondidas no próprio enunciado, no espaço disponibilizado para o efeito. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_

Cada um dos cinco grupos de perguntas de escolha múltipla vale 10 pontos (1 valor). Cada resposta certa vale 2,5; cada resposta errada vale -2,5. A classificação de cada grupo variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10 pontos.

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

1. Sejam  $A$ ,  $B$  e  $C$  acontecimentos de um espaço de resultados  $\Omega$ .
  - a) Se  $A$  e  $B$  são mutuamente exclusivos, então também são independentes
  - b) Se  $P(A - B) = P(A)$ , então  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
  - c) Se  $P(B) > 0$ , então  $P(A \cap B \cap C) = P(B) \times P(A \cap C | B)$
  - d) Se  $A \subset B$  e  $P(A) > 0$ , então tem-se que  $P(B) > 0$
2. Considere uma v.a.  $X$  e a respectiva função de distribuição  $F(x)$ .
  - a) Sejam  $a$  e  $b$  números reais,  $a < b$ . Se  $X$  é contínua, então  $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$
  - b) Se  $X$  for discreta, quaisquer que sejam  $h > 0$  e  $x \in \mathbb{R}$  tem-se que  $F(x + h) - F(x) > 0$
  - c) Sendo  $X$  contínua com função densidade  $f(x)$ , tem-se  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du$  para todo o  $x$
  - d) Se  $F(x)$  tiver pontos de descontinuidade, então  $X$  é discreta
3. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias com função distribuição conjunta  $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ , representando  $F_X(x)$  e  $F_Y(y)$  as respectivas funções de distribuição marginais.
  - a) Se o coeficiente de correlação é nulo, então  $X$  e  $Y$  são independentes
  - b)  $F(x, y) = F_X(x) \times F_Y(y)$  para todo o  $(x, y)$
  - c) Para todo o  $x$ , tem-se  $F_X(x) = F(x, +\infty)$
  - d)  $\text{Var}(X + Y) \geq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$
4. Seja  $X$  uma variável aleatória e sejam  $E(X) = \mu$  e  $\text{Var}(X) = \sigma^2 < \infty$ .
  - a) Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ , então  $W = (X - \mu)^2 / \sigma^2 \sim \chi^2(1)$
  - b) Seja  $X \sim B(n, \theta)$ . Então  $Y = \theta - X \sim B(n, 1 - \theta)$
  - c) Se  $X \sim U(a, a + 1)$ , onde  $a$  é um número real, então a probabilidade de  $X$  pertencer a qualquer intervalo contido em  $(a, a + 1)$  é igual ao comprimento desse intervalo
  - d) Considere a variável  $Z = (X - \mu) / \sigma$ . Então  $E[Z] = 0$  e  $\text{Var}(Z) = 1$

5. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra casual de tamanho  $n > 2$  proveniente de uma população  $X$  possuindo média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  finita.

a)  $P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \sum_{i=1}^n P(X \leq x_i)$

b) Se  $X$  tem distribuição Normal, então  $\bar{X}$  é uma estatística com distribuição Normal

c) A correcção de continuidade só deve ser usada se a distribuição de  $X$  for Binomial ou Poisson

d) O teorema do limite central determina a distribuição aproximada da estatística  $\sum_{i=1}^n X_i$  para  $n$  suficientemente grande

**Responda às perguntas que se seguem no espaço disponibilizado para o efeito. Justifique cuidadosamente todos os passos. Cotação de cada pergunta: 15 pontos.**

6. Mostre que se  $X \sim \text{Ex}(\lambda)$ , onde  $\lambda > 0$  e  $c > 0$ , então  $Y = cX$  é tal que  $Y \sim \text{Ex}(\lambda/c)$ .

7. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra casual proveniente de uma população com função de distribuição  $F(x)$ . Mostre que para todo  $x$  se tem  $P(X_1 > x, \dots, X_n > x) = [1 - F(x)]^n$ .

Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 2.ª Parte – Prática (Cotação: 12 valores).** Esta parte é composta por 4 questões, cada uma na sua folha. As questões devem ser respondidas no espaço disponibilizado para o efeito. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

**Atenção:** Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 10 pontos, uma resposta errada vale -2.5 pontos.

**Cotação:**

1.a)	b)	2.a)	b)	3.a)	b)	4.a)	b)
10	20	10	20	10	20	10	20

1. Determinada empresa produz garrafas de vidro usando 3 máquinas diferentes: M1, M2 e M3. A probabilidade de produzir uma garrafa defeituosa é 0.01 para as máquinas M1 e M2; 0.05 para a máquina M3.

a) Em 20 garrafas seleccionadas ao acaso da produção da máquina M3, qual a probabilidade de se encontrarem pelo menos 3 defeituosas?

- i) 0.0596       ii) 0.05       iii) 0.0159       iv) 0.0755

b) Num lote de 15000 garrafas, sabemos que 7000 foram produzidas pela máquina M3. Seleccionada ao acaso uma garrafa desse lote, verifica-se que é defeituosa. Qual a probabilidade de esta ter sido produzida pela máquina M3?

---

**RESPOSTA 1.b)**

2. A função densidade conjunta do par  $(X, Y)$  é dada pela expressão

$$f(x, y) = \begin{cases} kxy & \text{se } 0 < x < 4, 1 < y < 5 \\ 0 & \text{outros } x. \end{cases}$$

a) O valor da constante  $k$  é dado por

i) 1/96

ii) 1

iii) 1/100

iv) 1/20

b) Determine  $E[X | Y = y]$  para  $1 < y < 5$ . O que se pode dizer acerca da independência entre  $X$  e  $Y$  tendo em conta apenas este resultado?

---

**RESPOSTA 2.b)**

3. O número de pessoas que entra em determinada superfície comercial segue um processo de Poisson. Em média, numa hora entram 20 pessoas neste estabelecimento. Admita que o estabelecimento está aberto diariamente entre as 10:00 e as 18:00.
- a) Determine a probabilidade de ter que se esperar mais de 5 minutos até entrar a primeira pessoa no estabelecimento.
- i) 0.0067       ii) 0.5332       iii) 0.1889       iv) 1/5
- b) No final de cada dia, a equipa de marketing classifica cada uma das 8 horas de funcionamento diário como “produtiva” se durante essa hora entrarem no estabelecimento mais de 25 pessoas. Qual a probabilidade de em dois dias de funcionamento se verificarem no máximo 4 horas “produtivas”?
- 

**RESPOSTA 3.b)**

4. Um empresa produz baterias cuja duração, em horas, segue uma distribuição de probabilidades cuja média é 15 horas e o desvio padrão é 2 horas.
- a) Um lote de baterias é considerado defeituoso se a média da duração das baterias nesse lote for inferior a 14.8 horas. Qual a probabilidade (aproximada) de um lote de 100 baterias ser considerado defeituoso?
- i) 0                       ii) 0.159                       iii) 0.242                       iv) 0.308
- b) Um novo tipo de baterias foi desenvolvido pela mesma empresa, e tem uma duração (em horas) cuja média é 16 horas e o desvio padrão 2.5 horas. Comparando duas amostras (uma de cada tipo) de 5 baterias cada, qual a probabilidade de se observar que a média amostral relativa à bateria antiga é superior à média amostral relativa à bateria nova? Enuncie as suposições efectuadas.
- 

**RESPOSTA 4.b)**