ESTATÍSTICA I – 2.º Ano/Gestão – 1.º Semestre – Época de Recurso – Duração: 2 horas

1.ª Parte – Teórica **N.º de Exame: RESOLUÇÃO** **27.01.2015**

Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 1ª Parte — Teórica (Cotação: 8 valores). As respostas às questões de escolha múltipla são efectuadas na correspondente folha de resposta anexa, que será recolhida 40 minutos após o início da prova. As outras questões devem ser respondidas no próprio enunciado, no espaço disponibilizado para o efeito.** No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Nome: ____ N.º: ________

Cada um dos cinco grupos de perguntas de escolha múltipla vale 10 pontos (1 valor). Cada resposta certa vale 2,5; cada resposta errada vale -2,5. A classificação de cada grupo variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10 pontos.

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (**V**) ou falsas (**F**).

1. Sejam A, B e C acontecimentos de um espaço de resultados Ω.

- **a)** Se $A \cap B = \varnothing$, então os acontecimentos A e B formam uma partição de Ω (**F**)
- **b)** Se $A \subset B$ e B se realiza, então A também se realiza (**F**)
- **c)** Se $C \subset A$, com $P(C) > 0$, então $P(A \cap B \mid C) = P(B \mid C)$ (**V**)
- **d)** $P(A) = 0$ se e só se $A = \varnothing$ (**F**)

2. Considere uma v.a. X e a respectiva função de distribuição $F(x)$.

- **a)** Quando $x \to +\infty$, sabemos que $F(x) \to 0$ (**F**)
- **b)** Nos pontos em que $F(x)$ é diferenciável, tem-se $0 \leq F'(x) \leq 1$ (**F**)
- **c)** $P(X = x) \leq F(x)$ qualquer que seja x (**V**)
- **d)** $F(x)$ pode ter um número infinito de descontinuidades (**V**)

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias

- **a)** Se $\text{Var}(X+Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$, então sabemos que X e Y são independentes (**F**)
- **b)** Sendo a e b, respectivamente, os quantis de ordem α e $1-\alpha$ de X, com $\alpha < 1/2$, temos sempre que $a \leq b$ (**V**)
- **c)** O coeficiente de variação é uma medida de localização de uma distribuição de probabilidades (**F**)
- **d)** Se o par (X, Y) for contínuo, então $P(X = Y) = 0$ (**V**)

4. Seja X uma variável aleatória

- **a)** Se $X \sim \text{Po}(\theta)$, então $P(X = 0) = e^{-\theta}$ (**V**)
- **b)** Se $X \sim \text{N}(0,1)$, então $E[X^2] = 1$ (**V**)
- **c)** O tempo de espera até à primeira ocorrência de um processo de Poisson segue uma distribuição de Poisson (**F**)
- **d)** A distribuição binomial é uma distribuição contínua (**F**)

5. Seja $X_1, \dots, X_n$ uma amostra casual de tamanho $n > 2$ proveniente de uma população X possuindo média μ e variância σ^2 finitas.

a) $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = 0$ se $i \neq j$ (**V**)

b) Qualquer que seja x, $P(X_1 > x) = P(X_n > x)$ (**V**)

c) O mínimo e o máximo amostrais, $X_{(1)}$ e $X_{(n)}$, são v.a. independentes (**F**)

d) Quando μ é desconhecido, $\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ não é uma estatística (**V**)

Responda às perguntas que se seguem no espaço disponibilizado para o efeito. Justifique cuidadosamente todos os passos. Cotação de cada pergunta: 15 pontos.

6. Seja X uma variável aleatória com variância finita. Seja ainda a uma constante. Mostre que se $Y = X + a$ então $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Var}(X)$.

RESPOSTA:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X,Y) &= E[XY] - E[X]E[Y] \\
&= E[X(X+a)] - E[X]E[X+a] \\
&= E[X^2 + aX] - E[X](E[X] + a) \\
&= E[X^2] + aE[X] - E^2[X] - aE[X] \\
&= E[X^2] - E^2[X] = \mathrm{Var}(X)
\end{aligned}$$

7. Seja A um acontecimento de um espaço de resultados Ω. Mostre que se $P(A) = 0$, então A é independente de qualquer outro acontecimento B.

RESPOSTA:

Seja $B \subset \Omega$ um acontecimento. Então, A e B são independentes $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Como $P(B) = 0$, A e B são independentes se e só se $P(A \cap B) = 0$.

Mas, como $A \cap B \subset A$, segue-se que $0 \leq P(A \cap B) \leq P(A) = 0$, logo $P(A \cap B) = 0$ para qualquer acontecimento B.

FIM DA 1ª PARTE **VSFF**

Este exame é composto por duas partes. **Esta é a 2.ª Parte – Prática (Cotação: 12 valores). Esta parte é composta por 4 questões, cada uma na sua folha. As questões devem ser respondidas no espaço disponibilizado para o efeito.** No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 10 pontos, uma resposta errada vale -2.5 pontos.

Cotação:

1.a)	b)	2.a)	b)	3.a)	b)	4.a)	b)
10	20	10	20	10	20	10	20

1. Colocou-se um sensor em determinado ponto de uma auto-estrada que permanece activo entre as 7:00 e as 9:30. Por experiência, sabe-se que um em cada 5 veículos que passa por este troço da auto-estrada entre as 7:00 e as 9:30 circula em excesso de velocidade.

a) Qual a probabilidade de, entre os primeiros quatro veículos a passar por este troço da auto-estrada entre as 7:00 e as 9:30, exactamente 2 o fazerem em excesso de velocidade? (Assinale com uma cruz o quadrado adequado.)

☐ **i)** 0.0256 ☒ **ii)** 0.1536 ☐ **iii)** 0.2 ☐ **iv)** 0.9728

b) Assuma que 60% dos veículos que passam por estre troço da auto-estrada transportam apenas uma pessoa, e que 70% dos veículos que circula em excesso de velocidade transportam apenas uma pessoa. Sabendo que o sensor determinou que determinado veículo não circula em excesso de velocidade, qual a probabilidade de esse veículo transportar apenas uma pessoa?

RESPOSTA 1.b) Considerem-se os acontecimentos:

$$S = \text{“Veículo transporta apenas uma pessoa”}$$
$$E = \text{“Veículo circula em excesso de velocidade”} \ .$$

Queremos calcular $P(S|\bar{E})$.

Sabemos que $P(S) = 0.6$; $P(E) = 0.2$; $P(S|E) = 0.7$.

Pelo teorema da probabilidade total,

$$P(S) = P(E)P(S|E) + P(\bar{E})P(S|\bar{E}) \Leftrightarrow$$
$$0.6 = 0.7 \times 0.2 + 0.2P(S|\bar{E}) \Leftrightarrow$$
$$P(S|\bar{E}) = \frac{0.6 - 0.7 \times 0.2}{0.8} = 0.575 \ .$$

VSFF

2. Considere uma variável aleatória X cuja função de distribuição é

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^2/3 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x - x^2/6 - 1/2 & \text{se } 1 \leq x < 3 \\ 1 & \text{se } x \geq 3 \ . \end{cases}$$

a) Sobre a variável aleatória X podemos afirmar que (Assinale com uma cruz o quadrado adequado.)

☐ **i)** é mista ☒ **ii)** é contínua ☐ **iii)** $E[X] = 0$ ☐ **iv)** $P(X < -1) > 0$

b) Determine a mediana de X.

RESPOSTA 2.b)

A mediana é a solução x de $F(x) = 1/2$.

Como $F(1) = 1/3 < 1/2$, é claro que a mediana é a solução de

$$\begin{aligned} x - x^2/6 - 1/2 = 1/2 \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{x^2}{6} + x - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 - 6x + 6 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad x = 3 \pm \sqrt{3} \ . \end{aligned}$$

Como $3 + \sqrt{3} > 3$, a mediana de X é $\xi_{0.5} = 3 - \sqrt{3} \simeq 1.268$.

3. O tempo (em dias) que demora a reparar determinado elevador é bem modelado por uma distribuição exponencial cuja média é 1.5 dias.

a) O elevador acabou de avariar. Qual a probabilidade de este estar imobilizado nos próximos 4 dias por causa desta avaria? (Assinale com uma cruz o quadrado adequado.)

☒ **i)** 0.0695 ☐ **ii)** 1/4 ☐ **iii)** 0.0463 ☐ **iv)** 0.0025

b) Qual a probabilidade de o tempo total de reparação associado a 10 avarias ser superior a 30 dias?

RESPOSTA 3.b)

Seja X_i ="Tempo de reparação da avaria i", $i = 1, \ldots, 10$.

Assumindo que as v.a. X_i são independentes, e dado que $X_i \sim \text{Ex}(\frac{2}{3})$, segue-se que

$$\sum_{i=1}^{10} X_i \sim G(10; \frac{2}{3}) \Leftrightarrow$$
$$2 \times \frac{2}{3} \sum_{i=1}^{10} X_i = \frac{4}{3} \sum_{i=1}^{10} X_i \sim \chi^2(20)$$

Pretende-se calcular

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{10} X_i > 30\right) &= P\left(\frac{4}{3}\sum_{i=1}^{10} X_i > \frac{4}{3} \times 30\right) \\ &= P(\chi^2(20) > 40) \simeq 0.005 \end{aligned}$$

4. Assuma que o diâmetro, em milímetros, de um aro de bicicleta produzido pela marca *OPE* tem distribuição normal com valor esperado 622 mm e desvio padrão 0.4 mm.

a) Qual a probabilidade de um aro seleccionado ao acaso da produção diária da *OPE* exceder 623mm? (Assinale com uma cruz o quadrado adequado.)

☐ **i)** ≈ 0 ☐ **ii)** 0.1586 ☐ **iii)** 0.0569 ☒ **iv)** 0.0062

b) Cada lote de 10 aros é rejeitado na sua totalidade se o maior diâmetro encontrado nesse lote for inferior a 622.5 mm. Num conjunto de 50 lotes de 10 aros cada, determine o valor esperado e a variância do número total de aros rejeitados.

RESPOSTA 4.b)

Seja X = "n.º de lotes de 10 aros rejeitados entre os 50 lotes". Tem-se que $X \sim \mathrm{B}(50, \theta)$ onde $\theta = P$("lote de 10 aros ser rejeitado").

Sejam $Y_1, \cdots, Y_{10} \overset{iid}{\sim} \mathrm{N}(622, 0.4^2)$ as variáveis que designam o diâmetro dos 10 aros de um lote. Assim,

$$\begin{aligned}\theta &= P(Y_{(n)} < 622.5)\\ &= \left[\Phi\left(\frac{622.5-622}{0.4}\right)\right]^{10}\\ &= \left[\Phi\left(1.25\right)\right]^{10} = 0.3274\end{aligned}$$

Seja Z = "n.º de aros rejeitados no lote de 50 lotes de 10 aros cada". Então,

$$Z = 10X \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned}&E[Z] = 10\ E[X] = 10 \times 50 \times 0.3274 = 163.7\\ &\mathrm{Var}(Z) = 10^2\ \mathrm{Var}(X) = 100 \times 50 \times 0.3275 \times (1 - 0.3275) = 1101.219\end{aligned}$$

FIM