

# Capítulo 1

## Teoria dos Erros

1. A tabela seguinte apresenta aproximações ( $\bar{x}$ ) de alguns números reais ( $x$ ). Calcule em cada caso os erros absoluto e relativo, bem como a percentagem de erro.

$\bar{x}$	1.41	0.999	3.1213
$x$	$\sqrt{2}$	1/10	$\pi$

2. Seja  $\bar{x} = 30.58$  uma aproximação do comprimento  $x$ , com erro inferior a 2%. Considere ainda outra grandeza  $y \in [1.00, 1.01]$ .
- (a) O erro referido para a grandeza  $x$  é relativo ou absoluto? Justifique.
  - (b) Qual o valor  $\bar{y}$  que devemos escolher (para aproximar  $y$ ), de modo a obter a maior precisão possível? Indique majorantes para os erros relativo e absoluto de  $y$ .
  - (c) Com base nas alíneas anteriores, indique o número de algarismos significativos de  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$ . (Nota: dizemos que  $\bar{u}$  tem  $d$  algarismos significativos se  $|u - \bar{u}| \leq 0.5 \times 10^{-d}$ ).
3. Escreva aproximações de  $1/3$ ,  $e^2$  e  $\sqrt{7}$  com cinco algarismos significativos.
4. O número de dígitos correctos  $c$  de uma aproximação  $\bar{x}$  do número real  $x$  pode ser definido como

$$c = -\log_{10} (|x - \bar{x}|/|x|)$$

experimente a fórmula referida para os valores

$\bar{x}$	130	0.0130	1.3
$x$	133.333	0.013333	1.33333

Parece-lhe satisfatória a definição dada? Compare com os valores que se obtêm ao usar a definição habitual de número de algarismos significativos.

5. Considere os valores  $A = 0.492$ ,  $B = 0.603$ ,  $C = -0.494$ ,  $D = -0.602$ ,  $E = 10^{-5}$ , a partir dos quais se pretende calcular

$$F = \frac{A + B + C + D}{E}.$$

Imaginando que tem uma máquina de calcular que representa números reais num sistema de ponto flutuante com 3 dígitos na mantissa, calcule  $F$  por dois processos distintos, mas matematicamente equivalentes: **i.** calcular  $(A + B)$  e  $(C + D)$ , somar os valores anteriores e, finalmente, dividir por  $E$ ; **ii.** calcular  $(A + C)$  e  $(B + D)$ , somar os valores anteriores e, finalmente, dividir por  $E$ . Quais os resultados obtidos por cada um dos processos descritos? Comente.

6. Determine que precisão deve ter uma aproximação de  $\pi$  de modo a podermos calcular  $\sqrt{\pi}$  com erro absoluto inferior a  $0.5 \times 10^{-4}$ .

7. Deduza as seguintes fórmulas de propagação de erro:

- (a) Erros relativo e absoluto para o quociente.
- (b) Erros relativo e absoluto para a subtração.

Comente os resultados obtidos quanto ao modo de propagação do erro nos dois casos analisados.

8. Considere os números  $x = \pi$  e  $y = 2199/700$ .

- (a) Obtenha aproximações  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  (de  $x$  e  $y$ ) com 4 algarismos significativos. Obtenha ainda  $\bar{x} - \bar{y}$ .
- (b) Calcule os erros relativo e absoluto de  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  e  $\bar{x} - \bar{y}$ .
- (c) Represente em ponto flutuante, com 6 algarismos na mantissa, os números  $x$  e  $y$ . Determine  $fl(fl(x) - fl(y))$ .

9. Considere a função  $f(x) = \log x$  e obtenha as fórmulas de propagação do erro relativo e absoluto.

10. A série de Taylor com resto para  $\sin x$  escreve-se

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n}(x)$$

onde

$$R_{2n}(x) = (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \sin \eta, \quad \eta \in [0, x]$$

- (a) Use os primeiros 4 termos da série anterior para estimar o valor de  $\sin(\pi/4)$ .
  - (b) Obtenha um majorante do respectivo erro de truncatura.
  - (c) Quantos algarismos significativos possui a estimativa calculada na alínea (a)?
  - (d) Desprezando os erros de arredondamento, quantos termos da série são necessários para calcular  $\sin(\pi/4)$  com erro absoluto inferior a  $10^{-12}$ .
11. Utilize a fórmula de Taylor de modo a que, para  $x$  próximo de zero, seja evitado o cancelamento subtrativo em no cálculo de  $f(x) = e^x - e^{-x}$ .
12. Proceda à reformulação das seguintes expressões, de modo a não ocorrer o cancelamento subtrativo, próximo dos pontos indicados.
- (a)  $f(x) = \sin x - \cos x$ ,  $x$  próximo de  $\frac{\pi}{4}$ .
  - (b)  $f(x) = 1 - \cos x$ ,  $x$  próximo de 0.
  - (c)  $f(x) = \left(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}\right)^{-1}$ ,  $x$  próximo de 0.
13. Considere a seguinte equação algébrica

$$y^2 + 2ay - b = 0, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

- (a) Estude o condicionamento do problema, em função dos parâmetros  $a, b$ .
- (b) Para  $a \gg b > 0$ , verifique que o algoritmo:

$$y = -a + \sqrt{a^2 + b}$$

para determinar a raiz de menor valor absoluto da equação é numericamente instável. Construa um algoritmo estável.

14. Considere o cálculo de  $w = \sqrt{x+4} - 2$ , para  $|x| \ll 1$ .

- (a) Trata-se de um problema bem condicionado? Justifique.
- (b) Verifique que a expressão que define  $w$  conduz a um algoritmo instável. Obtenha uma outra expressão para  $w$ , que permita construir um algoritmo estável.

15. O perímetro de um triângulo rectângulo pode ser calculado de acordo com a fórmula

$$P = (\cos \alpha + \sin \alpha + 1)h$$

onde  $\alpha$  e  $h$  são a medida de um dos ângulos agudos e o comprimento da hipotenusa, respectivamente.

- (a) Obtenha a expressão do erro relativo para  $P$ .
- (b) Estude o condicionamento e estabilidade do algoritmo.

16. Para qualquer  $x_0 > -1$  a sucessão definida recursivamente por

$$x_{n+1} = 2^{n+1} \left( \sqrt{1 + 2^{-n} x_n} - 1 \right), n \geq 0$$

converge para  $\log(x_0 + 1)$ . Reformule esta expressão, de modo a evitar perda de significância do resultado.

17. Conhecido  $y = \cos x$ , sabe-se que  $\sin x$  pode ser obtido através da expressão  $z = \sqrt{1 - y^2}$ . Obtenha a expressão do erro  $\delta_z$  de  $z$ . Para valores de  $x$  próximos de zero, o que pode afirmar quanto à precisão do resultado?

18. O número de Neper  $e$  define-se como sendo o limite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n.$$

Usando os valores  $n = 2^k$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$  tente obter este limite no seu computador. Compare com o valor exacto e explique o sucedido