



Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_

TEÓRICA	<i>Espaço reservado a classificações</i>			
	PRÁTICA			
EM	1.a)	2.a)	3.a)	4.a)
6.	1.b)	2.b)	3.b)	4.b)
7.				Total
Total				TOTAL

Cada um dos cinco grupos de perguntas de escolha múltipla vale 10 pontos (1 valor). Cada resposta certa vale 2,5; cada resposta errada vale -2,5. A classificação de cada grupo variará entre um mínimo de zero e um máximo de 10 pontos.

Classifique as seguintes afirmações como verdadeiras (V) ou falsas (F).

- Sejam  $A$  e  $B$  acontecimentos de um espaço de resultados  $\Omega$ .
  - Se  $A$  e  $B$  constituem uma partição de  $\Omega$ , então  $P(A) = 1 - P(B)$ . (V)
  - Se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $P(A | B) = P(A)/P(B)$ . (F)
  - Se  $B \subset A$  então  $P(\bar{A} | B) = 0$ . (V)
  - Se  $P(B) = 0.5$  então  $P(A)$  é igual à média aritmética de  $P(A | B)$  e  $P(A | \bar{B})$ . (V)
- Considere uma v.a.  $X$  e a respectiva função de distribuição  $F(x)$ .
  - Se  $X$  é contínua, então  $F(x) = P(X < x)$  para todo o  $x \in \mathbb{R}$ . (V)
  - Seja  $Y = \psi(X)$  uma função de  $X$ . Se  $X$  é discreta,  $Y$  pode ser contínua. (F)
  - Se existirem  $x \in \mathbb{R}$  e  $h > 0$  tais que  $F(x+h) - F(x) = 0$ , então  $X$  é discreta. (F)
  - Para qualquer  $x \in \mathbb{R}$  tem-se que  $P(X \geq x) - P(X = x) = 1 - F(x)$ . (V)
- Seja  $(X, Y)$  um vetor aleatório bidimensional com função de distribuição conjunta  $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ .
  - Se  $(X, Y)$  é contínuo, então a função de densidade conjunta é dada por  $f(x, y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [F(x, y)]$  para todo o  $(x, y)$ . (V)
  - Se  $\rho_{X,Y} = 0$  então  $E(XY) = E(X)E(Y)$ . (V)
  - Se  $X$  e  $Y$  não são independentes então tem-se sempre  $\text{Var}(X + Y) \neq \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ . (F)
  - Se  $X$  e  $Y$  são independentes, então  $E[e^{X+Y}] = E[e^X] \times E[e^Y]$ . (V)
- Seja  $X$  uma variável aleatória.
  - Se  $X \sim Bi(n, \theta)$  então  $\text{Var}(X) = E[(X - n\theta)^2]$ . (V)
  - Se  $X \sim Po(\lambda)$  então  $P(X \geq 1) = 1 - e^{-\lambda}$ . (V)
  - Se  $X \sim t(n)$  então  $E(X) \neq \xi_{0.5}$ , onde  $\xi_p$  é o quantil de ordem  $p$  da variável aleatória  $X$ . (F)
  - Se  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$  então  $P(|X - \mu| < k) = \Phi(k/\sigma)$  para todo o  $k \in \mathbb{R}$ . (F)

5. Seja  $X_1, \dots, X_n$  uma amostra casual de tamanho  $n > 2$  proveniente de uma população  $X$  possuindo média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$  finitas.
- $P(X_1 + X_2 \leq x + y) = P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq y)$  para todo o  $(x, y)$ . (F)
  - Se  $P(X_{(1)} > x) = 1$  então  $P(X_{(n)} > x) = 1$ . (V)
  - $E \left[ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \right] = \sigma^2$ . (F)
  - $T = \frac{1}{2} \left[ X_{(1)}^2 + X_{(n)}^2 \right]$  é uma estatística. (V)

**Responda às perguntas que se seguem no espaço disponibilizado para o efeito. Justifique cuidadosamente todos os passos. Cotação de cada pergunta: 15 pontos.**

6. Sendo  $A, B, C$  uma partição do espaço dos resultados  $\Omega$  em que todos os elementos têm probabilidade positiva, prove que  $P(\bar{A}) = P(B) + P(C)$ .

**RESPOSTA:**

Pelas propriedades de uma partição, tem-se

- $A \cup B \cup C = \Omega$
- $A \cap B = A \cap C = B \cap C = \emptyset$  (dois a dois incompatíveis)

- Da primeira propriedade segue que  $P(A \cup B \cup C) = P(\Omega) = 1$ .

- Da segunda propriedade segue que  $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ .

- Juntando os dois resultados, obtêm-se  $P(A) + P(B) + P(C) = 1$ , e portanto  $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = P(B) + P(C)$ .

7. Sejam  $X$  e  $Y$  variáveis aleatórias, e  $a, b \in \mathbb{R}$  constantes. Assumindo a existência de todos os momentos envolvidos, mostre que  $\text{Cov}(aX + b, Y) = a \cdot \text{Cov}(X, Y)$ .

**RESPOSTA:**

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(aX + b, Y) &= E[(aX + b) \cdot Y] - E(aX + b)E(Y) && \text{(por definição)} \\
 &= E(aXY + bY) - E(aX + b)E(Y) \\
 &= aE(XY) + bE(Y) - (aE(X) + b)E(Y) \\
 &= aE(XY) + bE(Y) - aE(X)E(Y) - bE(Y) \\
 &= a[E(XY) - E(X)E(Y)] \\
 &= a \cdot \text{Cov}(X, Y).
 \end{aligned}$$

Este exame é composto por duas partes. Esta é a 2.ª Parte – Prática (Cotação: 12 valores). Esta parte é composta por 4 questões, cada uma na sua folha. As questões devem ser respondidas no espaço disponibilizado para o efeito. No decorrer da prova não serão prestados quaisquer esclarecimentos. BOA SORTE!

**Atenção:** Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 10 pontos, uma resposta errada vale -2.5 pontos.

1. No âmbito de uma campanha de prevenção da diabetes, todos os utentes de um determinado centro de saúde foram sujeitos a uma medição do nível de glicose no sangue, e os utentes com um nível de glicose superior a 200mg/dl são identificados como potenciais diabéticos. De acordo com os ensaios clínicos, o resultado da medição é superior a 200mg/dl em 92% dos indivíduos com diabetes, e é igual ou inferior a 200mg/dl em 74% dos indivíduos saudáveis.

Assuma que, de entre os utentes desse centro de saúde, 15% sofrem de diabetes.

- a) Encontram-se neste momento 20 utentes na sala de espera do centro de saúde. Qual a probabilidade de pelo menos 5 serem diabéticos? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

i) 0.0673       ii) 0.1028       iii) 0.1702       iv) 0.9327

- b) Escolheu-se ao acaso um utente do centro de saúde. Sabendo que o resultado da medição do nível de glicose foi superior a 200mg/dl, qual a probabilidade de o utente ser diabético?

---

**RESPOSTA:**

Definam-se os acontecimentos  $D = \text{"utente é diabético"}$ ;  $M = \text{"resultado da medição do nível de glicose do utente é } > 200\text{mg/dl"}$ .

Queremos calcular  $P(D|M)$ .

Sabemos que:  $P(D) = 0.15$ ;  $P(M|D) = 0.92$ ;  $P(\bar{M}|\bar{D}) = 0.74$ .

Pelo teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} P(D|M) &= \frac{P(D)P(M|D)}{P(D)P(M|D) + P(\bar{D})P(M|\bar{D})} \\ &= \frac{0.15 \times 0.92}{0.15 \times 0.92 + (1 - 0.15) \times (1 - 0.74)} \\ &= \frac{138}{359} \\ &= 0.3844. \end{aligned}$$

2. Considere a variável aleatória bidimensional  $(X, Y)$  com função densidade conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x, y) = k(x + y), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 2$$

a) O valor da constante  $k$  é dado por: (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

i) 1/2

ii) 4

iii) 3

iv) 1/3

b) Calcule as densidades marginais e estude a independência das variáveis  $X$  e  $Y$ .

---

**RESPOSTA:**

Tem-se que

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^2 f_{X,Y}(x, y) dy \\ &= \int_0^2 \frac{x+y}{3} dy \\ &= \frac{1}{3} \left[ xy + \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = \frac{2}{3}(x+1), \quad 0 < x < 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x, y) dx \\ &= \int_0^1 \frac{x+y}{3} dx \\ &= \frac{1}{3} \left[ \frac{x^2}{2} + xy \right]_0^1 = \frac{1}{6}(1+2y), \quad 0 < y < 2 \end{aligned}$$

Sendo que  $f_{X,Y}(x, y) \neq f_X(x) \times f_Y(y)$ , as variáveis  $X$  e  $Y$  não são independentes.

3. O valor de um reembolso pago por uma determinada companhia de seguros de saúde segue uma distribuição exponencial com média 150 euros. Considere um dia em que a companhia de seguros procedeu ao pagamento de 5 reembolsos.

a) Qual a probabilidade de nenhum dos reembolsos pagos nesse dia ser inferior a 60 euros? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

- i) 0.0498       ii) 0.1353       iii) 0.1889       iv) 0.2636

b) Qual a probabilidade de, nesse dia, o valor médio dos reembolsos ser inferior a 240 euros?

---

**RESPOSTA:**

Seja  $X_i$  = Valor do  $i$ -ésimo reembolso,  $i = 1, \dots, 10$ .

Assumindo que as v.a. são independentes, e dado que  $X_i \sim \text{Ex}(\frac{1}{150})$ , segue-se que

$$\sum_{i=1}^5 X_i \sim G(5, \frac{1}{150})$$

e portanto

$$\frac{2}{150} \times \sum_{i=1}^5 X_i \sim \chi^2(2 \times 5).$$

Assim,

$$\begin{aligned} P(\bar{X} < 240) &= P\left(\sum_{i=1}^5 X_i \leq 5 \times 240\right) \\ &= 1 - P\left(\frac{2}{150} \times \sum_{i=1}^5 X_i > 5 \times 240 \times \frac{2}{150}\right) \\ &= 1 - P(\chi^2(10) > 16) \\ &= 0.90, \end{aligned}$$

utilizando as tabelas ou a calculadora.

4. Todas as manhãs, um gestor escolhe um de dois itinerários para se deslocar diariamente para o trabalho: utilizar a auto-estrada, ou atravessar o centro da cidade. O tempo de viagem médio é de 32 minutos pela auto-estrada e de 36 minutos no trajeto urbano. Os desvios-padrão dos dois trajetos são de 6.5 e 8 minutos, respetivamente. Assuma que os tempos de viagem, em ambos os itinerários, seguem uma distribuição normal, e que os tempos em dias distintos sejam independentes.

a) Esta manhã o gestor tem uma reunião marcada para as 9h, mas apenas conseguiu iniciar a sua viagem às 8h31. Se o gestor utilizar a auto-estrada, qual é a probabilidade de não chegar atrasado à reunião? (Assinale com uma cruz no quadrado adequado.)

i) 0.14

ii) 0.19

iii) 0.32

iv) 0.35

b) Nos 20 dias úteis do mês de Maio, o gestor escolheu a auto-estrada em 13 deslocações matinais e o percurso pelo centro da cidade nas restantes 7. Qual é a probabilidade de a média dos tempos de viagem pela auto-estrada ser superior à média dos tempos de viagem através da cidade?

---

**RESPOSTA:**

Seja  $\bar{X}_1$  a média dos tempos das  $n = 13$  viagens pela auto-estrada e  $\bar{X}_2$  a média dos tempos das  $m = 7$  viagens pela cidade. Assumindo que os tempos das diferentes viagens são independentes, tendo em conta que as populações são normais, segue-se que

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{m}\right)$$

onde  $\mu_1 = 32$ ,  $\sigma_1^2 = 6.5^2$ ,  $\mu_2 = 36$  e  $\sigma_2^2 = 8^2$ . Assim, a probabilidade que pretendemos calcular é

$$P(\bar{X}_1 > \bar{X}_2) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0) = 1 - \Phi\left(\frac{0 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n + \sigma_2^2/m}}\right) = 0.1279.$$