Teste 2 — 6 de Janeiro de 2016 — Duração: 1 hora

Tópicos de resolução

Atenção: Nas perguntas com alternativas, uma resposta certa vale 2 valores, uma resposta errada vale -0.5 valores.

Cotação:

1.	2.a)	b)	3.a)	b)	4.a)	b)
2	2	4	2	4	2	4

---

1. Seja X uma variável aleatória tal que $X \sim t(n)$ para algum $n > 0$. Mostre que $X^2 \sim F(1, n)$.

RESPOSTA 1.

(i) Se $X \sim t(n)$ então X tem a mesma distribuição que $\frac{U}{\sqrt{\frac{V}{n}}}$, onde U e V são independentes e $U \sim N(0, 1)$ e $V \sim \chi^2_{(n)}$.

(ii) Logo, X^2 tem a mesma distribuição que $\frac{U^2}{\frac{V}{n}}$.

(iii) Como $U^2 \sim \chi^2_{(1)}$, então X^2 tem a mesma distribuição que $\frac{\frac{\chi^2_{(1)}}{1}}{\frac{V}{n}}$.

(iv) Logo, $X^2 \sim F(1; n)$ pela definição da distribuição F-Snedecor.

2. Seja (X, Y) uma variável aleatória bidimensional com função densidade de probabilidade conjunta dada por

$$f(x, y) = x + y \ , \quad 0 < x < 1, \ 0 < y < 1 \ .$$

a) Calcule $P(Y < X/2)$.

☐ **i)** 3/32 ☐ **ii)** 11/150 ☐ **iii)** 7/54 ☒ **iv)** 5/24

b) Calcule $E[X\ Y]$. Sabendo adicionalmente que $E[X] = E[Y] = 7/12$, o que é que se pode afirmar acerca da independência entre X e Y?

RESPOSTA 2.b)

$$\begin{aligned} E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy \ f(x, y) \ dxdy \\ &= \int_0^1 \int_0^1 xy(x + y) \ dxdy \\ &= \int_0^1 y \left[\frac{x^3}{3} + y \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \ dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right) \ dy \\ &= \left[\frac{y^2}{6} + \frac{y^3}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Pelo que $E[XY] \neq E[X] \cdot E[Y]$. Se X e Y são independentes, então $E[XY] = E[X] \cdot E[Y]$. Donde se conclui que X e Y não são independentes.

VSFF

3. Considere que as avarias de um elevador ocorrem de acordo com um processo de Poisson em que em média ocorre uma avaria a cada 15 dias.

a) O elevador está a funcionar sem falhas há 45 dias. Qual a probabilidade de não avariar no próximos 30 dias?

☐ **i)** 0.3679 ☐ **ii)** 0.2636 ☒ **iii)** 0.1353 ☐ **iv)** 0.5134

b) Determine a probabilidade de num ano haver pelo menos 3 meses, mas menos de 6, em que o elevador funciona sem avarias (considere que todos os meses têm trinta dias.)

RESPOSTA 3.b)

Seja $X =$ "número de meses, num ano, em que não há avarias". Então $X \sim \mathrm{B}(12;\theta)$.

Seja $Y =$ "número de avarias num mês". Então $Y \sim \mathrm{Po}(2)$.

Donde:

$\theta = P(Y = 0) = \mathrm{e}^{-2} \simeq 0.1353$

A probabilidade pedida é então

$$P(3 \leq X < 6) = F_X(5) - F_X(2) \simeq 0.2122$$

usando a máquina de calcular. [Alternativamente, pelas tabelas obtém-se o valor 0.2595 fazendo $\theta = 0.15$.]

VSFF

4. Um vendedor afirma que os lotes de lenha para lareira que ele vende são contituídos por troncos cujo peso (em kg) é bem modelado por uma variável aleatória cujo valor médio é 3 kg e o desvio padrão é 0.25 kg.

a) Considere um lote de 5 troncos e admita uma distribuição normal para o peso de um tronco. Nestas circunstâncias, calcule a probabilidade de todos os troncos do lote terem um peso compreendido entre 3 e 3.5 kg.

☐ **i)** 0.012 ☒ **ii)** 0.025 ☐ **iii)** 0.006 ☐ **iv)** 0.003

b) O José comprou 500 kg de lenha mas ficou com a sensação de que tinha sido enganado no peso. Contou os troncos um a um e chegou à conclusão de que o vendendor lhe entregou 170 troncos. Qual a probabilidade de o José ter sido enganado?

RESPOSTA 4.b)

Seja X_i = "peso do tronco i", $i = 1, ..., 170$.

Pretendemos calcular: $P\left(\sum_{i=1}^{170} X_i < 500\right)$.

Assumindo que os X_i são independentes, o Teorema do Limite Central garante que:

$$\frac{\sum_{i=1}^{170} X_i - 170 \times 3}{\sqrt{170 \times 0.25^2}} \overset{a}{\sim} \mathrm{N}(0,1)$$

Logo:

$$P\left(\sum_{i=1}^{170} X_i < 500\right) \simeq \Phi\left(\frac{500 - 170 \times 3}{\sqrt{170 \times 0.25^2}}\right) \simeq 0.001$$