Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 15 Janeiro 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere os conjuntos

$$M = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon z + \log(z/x) - \log(z/y) = 0,\ x,y,z > 0\right\},$$

$$N = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 - y^2 = z\}.$$

(a) Mostre que M, N e $M \cap N$ são variedades diferenciais e determine as suas dimensões.

(b) Escreva os espaços tangente e normal de $M \cap N$ num ponto qualquer $p \in M \cap N$.

(2) Calcule:

(a) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(b) o integral

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx.$$

(c) o ponto sobre a superfície esférica de centro $(2,3,4)$ e raio 1, mais próximo da origem.

(3) Considere a curva em $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 9x^2 + 4y^2 = 36\}.$$

(a) Calcule o integral de linha sobre Γ da função $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \sqrt{81x^2 + 16y^2}$.

(b) Seja

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (x,y) \in \Gamma,\ z \in [0,1]\}.$$

Determine o fluxo de $g(x,y,z) = (0,0,1)$ através de M.

(4) Considere o conjunto $\Omega = [0,1]$ e o subconjunto das partes de Ω dado por $\mathcal{A} = \{\{0\},\{1\}\}$. Indique a σ-álgebra $\mathcal{F}$ gerada por $\mathcal{A}$. Decida se

$$\mu(A) = \begin{cases} 1, & 0 \in A \text{ ou } 1 \in A \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \qquad A \in \mathcal{F},$$

é uma medida de probabilidade.

(5) (a) Calcule

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-t/n}\, dt.$$

(b) Mostre que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Sugestão: Recorde que $1/(1-y) = \sum_{n \geq 0} y^n$ com $|y| < 1$. Use o teorema de Beppo-Levi.