Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2008/2009

EXAME FINAL 30 Janeiro 2009

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Seja $F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y).$$

(a) Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1, 1, 0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ é o gráfico de uma função $f\colon I \to \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de $\mathbb{R}$.

(b) Encontre uma parametrização de $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ numa vizinhança U de $(1, 1, 0)$.

(2) Considere o caminho $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$\gamma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t).$$

Calcule:

(a) o comprimento da curva $\Gamma = \gamma([0, 2\pi])$.

(b) o integral do campo vectorial $f(x, y, z) = (e^x \sin y, e^x \cos y, 1)$ ao longo de γ.

(3) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima.

(4) Considere a superfície

$$M = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = z^2,\ \frac{\pi}{2} < z < \frac{3\pi}{2} \right\}.$$

(a) Escreva uma representação paramétrica de M e determine o integral de $f(x, y, z) = (x + y) \sin z$ em M.

(b) Calcule o fluxo do campo vectorial $g(x, y, z) = (xz^2, yz^2, z^3)$ através de M segundo a normal unitária com terceira componente negativa.

(5) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 \colon \omega_1, \omega_2 \in \{0, \dots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega \colon \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \dots, 9\}$. Determine a σ-álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$. Nestas condições, construa uma medida de probabilidade.

(6) Calcule:

(a)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} \sin^n(x + y)\, dx\, dy.$$

(b)

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{[0,1]} \left[\frac{2n^2}{n^2 + x^2} + f(x^n) \right] dx,$$

onde $f \in C^0([0, 1])$.