INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

1^o Ano / 2^o Semestre **Matemática 1** 24/06/2009

ÉPOCA DE RECURSO

NOME: ______________________________ Número: __________

Primeira Parte (9 valores)

As 6 perguntas seguintes são de escolha múltipla, **devendo ser respondidas no próprio enunciado**. Cada resposta correcta vale 1.5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0.5 valores. Assinale apenas uma resposta a cada pergunta.

1. Considere a seguinte série geométrica:

$$1 - \frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{4}\sin^2 x - \frac{1}{8}\sin^3 x + \cdots$$

A soma da série é igual a

☐ $\dfrac{1}{1+\sin x}, \quad -1 < x < 1$ ☐ $\dfrac{2}{2+\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}$

☐ $\dfrac{1}{1+\cos x}, \quad -1 < x < 1$ ☐ $\dfrac{2}{2+\cos x}, \quad x \in \mathbb{R}$

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 1^-} x^{\frac{1}{3-3x}}$.

☐ 1 ☐ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

3. O valor da área compreendida entre os gráficos das funções $y = \frac{1}{2}x^2$ e $y = \frac{1}{2}x$ é:

☐ $\dfrac{1}{18}$ ☐ $\dfrac{1}{12}$ ☐ 9 ☐ $\dfrac{27}{2}$

4. Considere a função $f : D_f \to (0, +\infty)$, definida por $f(x) = xf^3(x) + 1$ e tal que f(0)=1. A equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é:

☐ $y = 1$ ☐ $y = 0$ ☐ $y = x - 1$ ☐ $y = x + 1$

5. Seja $g(x) = e^{(a-x)^2}$ uma função definida em $\mathbb{R}$. Indique o valor da constante a de modo que $El_x g(x) = 2x^2 - 2x, \forall x \in \mathbb{R}$.

☐ $a = 0$ ☐ $a = 2$ ☐ $a = 1$ ☐ $a = -\frac{1}{2}$

6. O valor de k para o qual os vectores $\boldsymbol{u} = (1, 2k, 1)$ e $\boldsymbol{v} = (0, -1, 2)$ são ortogonais é:

☐ $k = -1$ ☐ $k = 1$ ☐ $k = 3/2$ ☐ $k = 2$

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

1^o Ano / 2^o Semestre **Matemática 1** 24/06/2009

ÉPOCA DE RECURSO

Segunda Parte (11 valores)

Cotação: 1. 2.5 + 1.0 + 1.0; **2.** 1.5 + 1.5; **3.** 1.0 + 1.0; **4.** 1.5

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \alpha x_3 + x_4 &= \beta \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   (a) Classifique o sistema em função dos valores de α e β.

   (b) Resolva o sistema para $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

   (c) Faça $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Acrescente uma equação ao sistema de modo que este passe a ser possível e determinado. Justifique a sua resposta.

2. Considere a função $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

   (a) Estude a função f quanto à monotonia e determine os seus extremantes locais.

   (b) Determine os intervalos em que a função é côncava e convexa, bem como os seus pontos de inflexão.

3. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

   (a) $g(x) = \dfrac{2x^2}{1 + x^3}$

   (b) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - 2x^4}}$

4. Calcule, ou justifique que não existe, o limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_x^{x^2} e^{t^2} \sin t \, dt \right).$$

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

1^o Ano / 2^o Semestre **Matemática 1** 24/06/2009

Época de Recurso

NOME: ______________________________ Número: __________

Primeira Parte (9 valores)

As 6 perguntas seguintes são de escolha múltipla, **devendo ser respondidas no próprio enunciado**. Cada resposta correcta vale 1.5 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0.5 valores. Assinale apenas uma resposta a cada pergunta.

1. Considere a seguinte série geométrica:

$$1 - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos^2 x - \frac{1}{8}\cos^3 x + \cdots$$

A soma da série é igual a

☐ $\dfrac{1}{1+\sin x}, \quad -1 < x < 1$ ☐ $\dfrac{2}{2+\sin x}, \quad x \in \mathbb{R}$

☐ $\dfrac{1}{1+\cos x}, \quad -1 < x < 1$ ☐ $\dfrac{2}{2+\cos x}, \quad x \in \mathbb{R}$

2. Indique o valor de $\lim\limits_{x\to 1^-} x^{\frac{1}{2-2x}}$.

☐ 1 ☐ $\frac{1}{\sqrt{e}}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$

3. O valor da área compreendida entre os gráficos das funções $y = \frac{1}{3}x^2$ e $y = \frac{1}{3}x$ é:

☐ $\dfrac{1}{18}$ ☐ $\dfrac{1}{12}$ ☐ 9 ☐ $\dfrac{27}{2}$

4. Considere a função $f : D_f \to (0, +\infty)$, definida por $f(x) = xf^2(x) + 1$ e tal que f(0)=1. A equação da recta tangente ao gráfico de f em $x = 0$ é:

☐ $y = 1$ ☐ $y = 0$ ☐ $y = x - 1$ ☐ $y = x + 1$

5. Seja $g(x) = e^{(a-x)^2}$ uma função definida em $\mathbb{R}$. Indique o valor da constante a de modo que $El_x g(x) = 2x^2 - 4x, \forall x \in \mathbb{R}$.

☐ $a = 0$ ☐ $a = 2$ ☐ $a = 1$ ☐ $a = -\frac{1}{2}$

6. O valor de k para o qual os vectores $\boldsymbol{u} = (1, 2, 1)$ e $\boldsymbol{v} = (0, -k, 2)$ são ortogonais é:

☐ $k = -1$ ☐ $k = 1$ ☐ $k = 3/2$ ☐ $k = 2$

INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO

1^o Ano / 2^o Semestre **Matemática 1** 24/06/2009

ÉPOCA DE RECURSO

Segunda Parte (11 valores)

Cotação: 1. 2.5 + 1.0 + 1.0; **2.** 1.5 + 1.5; **3.** 1.0 + 1.0; **4.** 1.5

1. Considere o sistema de equações lineares

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - \alpha x_3 + x_4 &= \beta \\ 2x_1 - 5x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 6x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 2 \end{cases}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

   (a) Classifique o sistema em função dos valores de α e β.

   (b) Resolva o sistema para $\alpha = 0$ e $\beta = \frac{1}{2}$.

   (c) Faça $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Acrescente uma equação ao sistema de modo que este passe a ser possível e determinado. Justifique a sua resposta.

2. Considere a função $f(x) = (x^2 + 1)e^x$.

   (a) Estude a função f quanto à monotonia e determine os seus extremantes locais.

   (b) Determine os intervalos em que a função é côncava e convexa, bem como os seus pontos de inflexão.

3. Determine uma primitiva de cada uma das seguintes funções:

   (a) $g(x) = \dfrac{2x^2}{1 + x^3}$

   (b) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - 2x^4}}$

4. Calcule, ou justifique que não existe, o limite

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} \int_x^{x^2} e^{t^2} \sin t \, dt \right).$$