Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

1º Semestre 2005/2006

EXAME FINAL 16 Janeiro 2006

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Rapidez de resolução é um factor a ser testado

(1) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \colon \log x \geq 0\}.$$

(a) Indique em $\mathbb{R}$, se existirem, $\inf A$, $\min(A \cup B)$, $\sup(A \cup B)$ e $\inf(A \cap B)$.

(b) Diga qual é o derivado[1] de A.

(2) (a) Calcule a soma de *apenas* uma das seguintes séries:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(2n)!}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\arctan(n^n)}{n^2 + n^{1/2}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^{n+1}}, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)},$$

(b) Determine a natureza (convergência ou divergência) das restantes séries.

(3) Seja $f \colon [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f([a, b]) \subset [a, b]$. Mostre que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Sugestão: Use a função auxiliar $\varphi(x) = f(x) - x$.

[1] conjunto dos pontos de acumulação

(4) Considere a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} a \sin x + 1, & x \in]-\infty, 0] \\ x^2 \log x + b, & x \in]0, +\infty[, \end{cases}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Determine a e b tais que f seja diferenciável em $x = 0$.

(b) Para $b = 1$ diga quais os valores de a para os quais f não tem extremo local no ponto $x = 0$.

Sugestão: Estude a monotonia de f à direita e à esquerda de 0.

(5) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^x.$$

Calcule os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to 0^+} f(x)$

(b) $\lim_{x\to 0^+} f \circ f(x)$

Sugestão: Note que f é contínua no seu domínio.

(6) Escreva o polinómio de Taylor de ordem $n = 3$ em torno de $a = 1$ da função $f(x) = \log x$.

Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

1º Semestre 2005/2006

EXAME FINAL 1 Fevereiro 2006

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Rapidez de resolução é um factor a ser testado

(1) Dê exemplo de uma sucessão u_n tal que o conjunto

$$A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$$

tem derivado[2] $A' = \{0, 1, 2\}$.

(2) Sejam

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \quad \text{e} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$$

séries absolutamente convergentes[3].

(a) Mostre que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ a seguinte série converge:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[a_n \cos(2\pi n x) + b_n \sin(2\pi n x)\right].$$

(b) Seja a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que a cada $x \in \mathbb{R}$ faz corresponder o respectivo valor dado pela série da alínea anterior. Prove *apenas* uma das seguintes afirmações:

(i) f é uma função periódica com período 1.

(ii) Se f é ímpar então $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0$.

[2] conjunto dos pontos de acumulação

[3] a série dos valores absolutos converge

(3) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ regular[4] e positiva. Mostre que existe $c \in]a,b[$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left[(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right].$$

Sugestão: Use a função auxiliar $h = \log(f)$ em $[a,b]$.

(4) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^x}.$$

(a) Indique a recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$.
(b) Determine $f(\mathbb{R}^+)$ e, se possível, $\min f(\mathbb{R}^+)$ e $\max f(\mathbb{R}^+)$.
(c) Repita a alínea (a) para a função $g = f \circ f$.

(5) Calcule os seguintes limites:

(a)

$$\lim_{x\to a}\left(2 - \frac{x}{a}\right)^{\operatorname{tg}(\pi x/2a)}$$

(b)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x) - x}{\arcsin(x) - x}$$

(6) Escreva o polinómio de Taylor de ordem $n \in \mathbb{N}$ em torno de $a = 0$ da função $f(x) = \log(1 + x)$.

[4] contínua em $[a,b]$ e diferenciável em $]a,b[$