Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

2º Semestre 2005/2006

EXAME FINAL 20 Junho 2006

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Rapidez de resolução é um factor a ser testado

(1) Qual o conjunto dos sublimites da sucessão cujos termos iniciais são:

$$1, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, 5, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$$

(2) Seja $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ e $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) = \varphi(e^x) \quad \text{e} \quad g(x) = \varphi(\sin x).$$

Mostre que $f'(0) + g'(\pi/2) = \varphi'(1)$.

(3) Seja $f \in C^1([a, b])$ positiva. Mostre que existe $c \in]a, b[$ tal que

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \exp\left[(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\right].$$

Sugestão: Use a função auxiliar $h = \log(f)$ em $[a, b]$.

(4) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^x}.$$

(a) Indique a recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$.

(b) Determine $f(\mathbb{R}^+)$ e, se possível, $\min f(\mathbb{R}^+)$ e $\max f(\mathbb{R}^+)$.

(c) Repita a alínea (a) para a função $g = f \circ f$.

(5) Sejam $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\psi(x) = \int_0^x e^{x^2-y^2} g(y)\, dy.$$

(a) Justifique que $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ e calcule a derivada ψ'.

(b) Mostre que se g é uma função positiva, então ψ é estritamente crescente em $\mathbb{R}$.

(6) Calcule:

(a)

$$\int \frac{\log x}{x(1+\log x)^2} dx$$

(b)

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{e^x} e^{-x} f(t) dt$$

onde $f \in C^0(\mathbb{R}^+)$ é uma função que satisfaz a condição:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$