Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

2º Semestre 2005/2006

EXAME FINAL 30 Junho 2006

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Rapidez de resolução é um factor a ser testado

(1) Dê um exemplo de uma sucessão cujo conjunto dos sublimites é $\mathbb{Z}$.

(2) Seja $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = f(\arctan x)$. Mostre que

$$4\varphi''(1) = f''(\pi/4) - 2f'(\pi/4).$$

(3) Considere a função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^x}.$$

(a) Indique a recta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$.
(b) Determine $f(\mathbb{R}^+)$ e, se possível, $\min f(\mathbb{R}^+)$ e $\max f(\mathbb{R}^+)$.
(c) Repita a alínea (a) para a função $g = f \circ f$.

(4) Calcule a área entre as curvas em $\mathbb{R}^2$ descritas pelas equações:

$$x^2y^2 = 1 \quad \text{e} \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

(5) Sejam $u, v \in C^0(\mathbb{R})$ tais que

$$\int_a^x u = \int_b^x v, \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Prove que $u = v$ e $\int_a^b u = 0$.

(6) Mostre que se $f \in C^0([a,b])$ e $\int_a^b f = 0$, então f tem pelo menos uma raíz. *Sugestão*: Use o Teorema de Rolle para a primitiva.

(7) Calcule:

(a)

$$\int \operatorname{tg} x \, dx$$

(b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \sin t^5 \, dt}{\int_0^{x^2} \sin t^2 \, dt}$$