

Análise Matemática I – 1º ano MAEG
2º Semestre 2007/2008

EXAME FINAL 2 Junho 2008

Duração máxima: 2 horas
Todas as alíneas valem 2 valores
Sem consulta, sem calculadora
Rapidez de resolução é um factor a ser testado

(1) Observe que

$$\begin{aligned}1 &= 1^2 \\1 + 3 &= 2^2 \\1 + 3 + 5 &= 3^2 \\1 + 3 + 5 + 7 &= 4^2 \\&\dots\end{aligned}$$

Mostre por indução que

$$\sum_{i=1}^n (2i - 1) = n^2.$$

(2) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é contínua em \mathbb{R} .
- (b) Diga qual o domínio de diferenciabilidade de f e calcule a sua derivada.
- (c) Justifique que f é infinitamente diferenciável em 0, calcule $f^{(n)}(0)$ para $n \in \mathbb{N}$, e escreva o polinómio de Taylor de grau n de f em torno de 0.

- (3) Uma função f diz-se de *Lipschitz* num intervalo $[a, b]$ sse existe $C > 0$ tal que, para quaisquer pontos $x, x' \in [a, b]$, verifica-se

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|.$$

Mostre que se $f \in C^1([a, b])$, então f é de Lipschitz. *Sugestão:* Use o teorema de Lagrange (valor médio).

- (4) Detecte o erro na seguinte aplicação da Regra de Cauchy:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{2} = 3$$

e determine o valor correcto.

- (5) Recorde as seguintes fórmulas das funções hiperbólicas:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

- (a) Esboce os gráficos de \sinh e \cosh .
(b) Determine a inversa de \sinh em \mathbb{R} e a de \cosh em \mathbb{R}^+ .
(c) Calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

- (6) Calcule $\int_0^1 x dx$ usando as somas de Darboux.