Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

2º Semestre 2007/2008

EXAME FINAL 24 Junho 2008

Duração máxima: 2 horas

Todas as alíneas valem 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

Rapidez de resolução é um factor a ser testado

(1) Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ existem limites finitos das sucessões:

$$u_n = \left(\frac{a^2}{1-a}\right)^n \quad \text{e} \quad v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i.$$

(2) Considere a função $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

(a) Determine os domínios, sinais e zeros de f, f' e f''.

(b) Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, verifique as assímptotas de f e esboce o seu gráfico.

(c) Indique $f(\mathbb{R})$, encontre a função inversa f^{-1} e esboce o seu gráfico.

(3) Uma função f diz-se de *Lipschitz* num intervalo $[a, b]$ sse existe $C > 0$ tal que, para quaisquer pontos $x, x' \in [a, b]$, verifica-se

$$|f(x) - f(x')| \leq C|x - x'|.$$

Decida, justificando, se a função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é de Lipschitz em $[0, 1]$.

(4) Quais os domínios de continuidade e diferenciabilidade da função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) - 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(5) Calcule:

(a)

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2}$$

(b)

$$\int \frac{1}{x^3[(x-1)^2 + 1]}\, dx.$$

(c) para que valores de $\delta > 0$ o integral converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x^\delta)}{x^\delta}\, dx.$$

(6) Seja $f\colon [-a, a] \to \mathbb{R}$ integrável à Riemann. Prove que se f é uma função ímpar, então $\int_{-a}^{a} f = 0$. Prove também que se f é uma função par, então $\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.