Instituto Superior de Economia e Gestão
Análise Matemática I
Licenciatura em MAEG
1ºSemestre 2008/2009
Época Normal: 14 de Janeiro de 2009
Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

(3,5) 1. Considere u_n a sucessão cujos primeiros termos são

$$1, \frac{3}{4}, -\frac{3}{2}, 2, \frac{6}{7}, -\frac{6}{5}, 4, \frac{9}{10}, -\frac{9}{8}, 8, \frac{12}{13}, -\frac{12}{11} \dots$$

(a) Escreva o termo de ordem geral da sucessão u_n e indique o conjunto dos sublimites de u_n.

(b) Sendo $A = \{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} : \ln(x - \sqrt{2}) \geq 0\} \cap \mathbb{Q}$, indique, caso existam, o conjunto dos minorantes e majorantes de A, o interior e a aderência de B.

(3,5) 2. (a) Calcule a área da figura plana limitada pelas rectas $x = \pi/4$, $x = \pi$, pelo eixo dos x's e pelo gráfico da função $f(x) = \sin^2 x$.

(b) Calcule a primitiva da função $\dfrac{1}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$ que se anula em $x = 1$.

(5,0) 3. Seja $k \in \mathbb{R}$ e considere-se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ função tal que

$$f(x) = \begin{cases} x \displaystyle\int_0^{(x^2+x)} \frac{1}{1+t^2} dt & \text{se } x \geq 0 \\[2ex] \dfrac{e^{kx^2} - 1}{x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

(a) Justifique que, para todo $k \in \mathbb{R}$, se tem $f \in C^0(\mathbb{R})$.

(b) Calcule k de forma a que f seja diferenciável em $x = 0$ e escreva a equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$.

(c) Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \; x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

(3,0) 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva em $[a, b]$, diferenciável em $]a, b[$ e tal que $f(a) = f(b) = 1$. Considere a função g definida no mesmo intervalo tal que $g(x) = f(x)\ln(f(x))$.

(a) É possível aplicar o teorema de Rolle à função g no intervalo $[a, b]$? Justifique.

(b) Utilize a alínea anterior para mostrar que existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = e^{-1}$ ou $f'(c) = 0$.

(2,5) 5. Estude, em função dos parâmetro α e β, a convergência do seguinte integral:

$$\int_1^{+\infty} \frac{x+1}{x^\alpha (x-1)^{2\beta - \alpha}} dx.$$

(2,5) 6. Sendo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva em $\mathbb{R}$ verifique que se tem

$$\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \int_0^{\frac{1}{x}} f(t) dt\right)^x = e^{f(0)}.$$