

Análise Matemática I

2008/2009 (2º Semestre)

Época normal: 3 de Junho de 2009

Duração: 2 horas

Justifique cuidadosamente todas as respostas que apresentar

1. **(3 valores)** Calcule os seguintes limites, caso existam:

(a) $\lim \sqrt[n]{2^n + 1}$; (b) $\lim n^3 (\sqrt{2^n + n} - \sqrt{2^n + 3})$.

2. **(2 valores)** Considere uma sucessão que verifique

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < a_n < a_{n+1} < 1$$

- (a) Indique o conjunto dos limites de todas as sucessões que satisfazem esta condição.
(b) Indique o supremo e o ínfimo do conjunto de termos de uma tal sucessão. Esse conjunto tem máximo? e mínimo?

3. **(3 valores)** Seja $\alpha \in \mathbb{R}$, uma constante e seja $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} + \alpha x, & \text{se } x \neq 0; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

- (a) Mostre que f é derivável em todo o seu domínio e determine a função $f'(x)$;
(b) Estude a função $x \mapsto f'(x)$ quanto à continuidade.

4. **(3 valores)** Considere a função

$$f(x) = (x^2 - 1) \ln \frac{1 - x}{1 + x}.$$

- (a) Determine o domínio de f .
(b) Faça o estudo da função e represente-a graficamente.

5. **(3 valores)** Calcule os integrais

(a) $\int_0^1 x^4 (1 + x^5)^5 dx$, (b) $\int_0^\pi e^x \sin x dx$.

6. **(3 valores)** Seja $\alpha \in]0, +\infty[$, uma constante e considere a função

$$f(x) = \int_0^1 t^\alpha \sin(tx) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- (a) Mostre que $f(x) = \frac{1}{x^{1+\alpha}} \int_0^x t^\alpha \sin t dt$;
(b) determine $f'(x)$.

7. **(3 valores)** Estude a convergência do integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^{\alpha+1} + x^{\alpha-1}}} dx$$

em função do valor do parâmetro α .