Análise Matemática III

LISTA 2

(1) Descreva parametricamente e determine a dimensão de cada uma das seguintes variedades:

(a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ y > |x|,\ |z| < 2\}$.

(b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon (\sqrt{x^2+y^2} - 4)^2 + z^2 = 1\}$.

(c) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 3\}$.

(2) Considere as variedades seguintes e determine as suas dimensões e espaços tangente e normal no ponto p:

(a) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 1,\ z = x^2 - y^2\}$, $p = (1,0,1)$

(b) $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2+y^2 = z^2+1,\ 0 < z < 2\}$, $p = (0,\sqrt{2},1)$

(3) Determine os extremos de f em S:

(a) $f(x,y) = x$, $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + 2y^2 = 3\}$.

(b) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $S = \{(x,2) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$.

(c) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $S = \{(x, \cos x) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in \mathbb{R}\}$.

(d) $f(x,y,z) = x$, $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + y^2 = 2,\ x + z = 1\}$.

(4) Decomponha a unidade num produto de três números positivos cuja soma seja mínima. *Sugestão*: Escreva a soma como uma função a minimizar, sobre a superfície que corresponde ao produto de três números positivos.

(5) *Considere uma matriz A simétrica 3×3 não nula, e a função $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{2} x \cdot Ax.$$

Sabendo que f tem máximo e mínimo na 2-esfera

$$S^2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \colon x \cdot x = 1 \right\},$$

mostre que existe $x_0 \in S^2$ e $\lambda \neq 0$ tais que $Ax_0 = \lambda x_0$.