Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 3

(1) (a) Prove, utilizando o princípio de indução matemática, que

$$1+2+3+\ldots+n<\frac{1}{8}(2n+1)^2, \qquad \forall n\in\mathbb{N}.$$

(b) Considere o conjunto $A=\left\{\frac{1+(-1)^n n}{2n}: n\in\mathbb{N}\right\}$. Indique o conjunto dos majorantes e o conjunto dos minorantes de A, e, caso existam, o mínimo de A e o máximo A.

(2) Encontre uma bijecção $h_1\colon]0,1[\to\mathbb{R}$ que envolva a função tangente e outra $h_2\colon\mathbb{R}\to]0,1[$ com a função arctan. Conclua que $\#\mathbb{R}=\#]0,1[$.

(3) Sejam A, B e C os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}$:

$$A=\left\{\frac{n}{n^2+1}: n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left]\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right[\cup\left\{\frac{n+1}{n}: n\in\mathbb{N}\right\},$$

$$B=\left\{1+(-1)^n\frac{n+2}{n+1}: n\in\mathbb{N}\right\} \qquad \text{e} \qquad C=\{m+1/n\colon n,m\in\mathbb{N}\}.$$

(a) Determine o interior, a fronteira e o derivado de cada um dos conjuntos.

(b) Calcule o conjunto dos majorantes e minorantes de A, B e C e indique, caso exista, o máximo e o mínimo de cada um deles.

(4) Dê exemplo (se possível) de um subconjunto de $\mathbb{R}$ que seja

(a) finito não vazio e aberto

(b) fechado não limitado

(c) igual ao derivado

(d) igual à fronteira

(e) finito não majorado

(5) Considere o seguinte subconjuto de $\mathbb{R}$:

$$X=\{x\in\mathbb{R}\backslash\{0\}: x/x^{-1}\le x^{-1}/x\}.$$

(a) Indique, caso existam, o supremo e o ínfimo de X.

(b) O conjunto X é um conjuto aberto? E fechado? Justifique.

(6) Prove que um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é um conjunto aberto se e só se $\mathbb{R}\backslash A$ é um conjunto fechado.

(7) Determine o interior, a fronteira e o derivado dos seguintes conjuntos:
  (a) $[0,2[\cup]3,5[\cup\{6,7\}$
  (b) $\{x \in \mathbb{R}\colon x^2 < 9\}$
  (c) $\{x \in \mathbb{R}\colon 0 < |x-3| \leq 5\}$
  (d) $\{x \in \mathbb{R}\colon x-1 \geq x\}$
  (e) $\{x \in \mathbb{R}\colon (x-1)/(x+3) > x/(x-2)\}$
  (f) $[1,2] \cap \mathbb{Q}$.

(8) Mostre que em $\mathbb{R}$ um conjunto aberto não pode ter nem máximo nem mínimo. *Sugestão*: Note que o supremo é um ponto na fronteira.

(9) (a) Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ é simultaneamente fechado e aberto sse $\operatorname{front} A = \emptyset$.
  (b) (*) Mostre que $\operatorname{front} A = \emptyset$ sse $A \in \{\emptyset, \mathbb{R}\}$.