**Análise Matemática III**

**LISTA 4**

(1) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1, \; -y \leq x \leq y\}.$$

(a) Calcule $\int_S \cos(x^2 + y^2)\, dx\, dy$.

(b) Determine o centróide de $S$.

(2) Use uma mudança linear de coordenadas para calcular

$$\int_S (x - y)^2 \sin^2(x + y)\, dx\, dy$$

onde $S$ é o paralelogramo com vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

(3) Mostre que:

(a) $\int_S f(x + y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} f(u)\, du$ onde

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| + |y| \leq 1\}.$$

(b) $\int_S f(xy)\, dx\, dy = \log(2) \int_1^2 f(u)\, du$ onde $S$ é a região no primeiro quadrante de $\mathbb{R}^2$ limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.

(4) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon -1 < x < 2, \, x^2 < y < x^2 + 1\}$$

e a função $g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (x, y - x^2)$.

(a) Mostre que $g$ é uma mudança de coordenadas.

(b) Use $g$ para calcular $\int_S x^2\, dx\, dy$.

(5) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x < 1, \, x^2 - 1 < y < x^2, \, x^3 < z < x^3 + 2\}$$

e a função $g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $g(x, y, z) = (x, y - x^2, z - x^3)$.

(a) Mostre que $g$ é uma mudança de coordenadas.

(b) Use $g$ para calcular

$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2}\, dx\, dy\, dz.$$

(6) Calcule o volume tri-dimensional dos seguintes conjuntos:

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0, \, y > 0, \, x^2 + y^2 < z < \sqrt{x^2 + y^2}\}$.

(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x \geq 0, \, y \geq 0, \, z \geq 0, \, y^2 + z^2 \leq x + 1/2, \, x \leq 3/2 - \sqrt{y^2 + z^2}\}$.

(c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \colon x > 0,\ y > 0,\ 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2},\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

(7) * Para cada $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$B_n(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \colon \sum_{i=1}^{n} |x_i| \leq a \right\}.$$

Prove que o volume $n$-dimensional de $B_n(a)$ é dado por

$$\mathrm{vol}_n\, B_n(a) = \frac{(2a)^n}{n!}.$$

*Sugestão:* Mostre que $\mathrm{vol}_n\, B_n(a) = a^n \,\mathrm{vol}_n\, B_n(1)$ e que $\mathrm{vol}_{n+1}\, B_{n+1}(1) = 2/(n+1)\,\mathrm{vol}_n\, B_n(1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.