

Análise Matemática III

LISTA 1 ¹

- (1) Seja $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2, x - y).$$

Mostre pelo teorema da função implícita que numa vizinhança de $(1, 1, 0)$ o conjunto $F^{-1}(\{(2, 0)\})$ é o gráfico de uma função $f: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ onde I é um intervalo aberto de \mathbb{R} .

- (2) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Mostre que f é diferenciável em \mathbb{R} e $f'(0) \neq 0$, mas não é invertível numa vizinhança de 0. Explique porque é que este exemplo não contradiz o teorema da função inversa.

- (3) Seja $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (u, v)$ onde

$$\begin{cases} u = x - y + \log(1 + xy) \\ v = x + y - x^2 y^2. \end{cases}$$

Mostre que existe uma vizinhança de $(0, 0)$ onde f tem inversa C^1 em torno de $f(0, 0)$. Calcule $\frac{\partial x}{\partial v}(0, 0)$.

- (4) *Assumindo a validade do teorema da função inversa, demonstre o teorema da função implícita. *Sugestão:* Considere $S \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $F \in C^1(S, \mathbb{R}^m)$, $n > m$, $F(a, b) = 0$ com $a \in \mathbb{R}^{n-m}$ e $b \in \mathbb{R}^m$, e $\det \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$. Aplique o teorema da função inversa a $H(x, y) = (x, F(x, y))$ de forma a resolver a equação $F(x, y) = 0$.

- (5) Descreva parametricamente cada uma das seguintes curvas:

(a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2/4 = 1\}$.

(b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 = 1, z = 3\}$.

(c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3: x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 1/2\}$.

- (6) (a) Escreva a parametrização de uma curva em \mathbb{R}^3 com a forma ∞ e decida se é uma variedade diferencial.

¹Comentários e/ou correcções para jldias@iseg.utl.pt. As questões mais difíceis encontram-se marcadas com *. A colaboração entre colegas é encorajada, mas cada estudante/grupo deve escrever as suas próprias soluções, compreendê-las e dar crédito aos seus colaboradores.

- (b) Calcule os espaços tangente e normal à curva da alínea anterior num ponto à sua escolha.
- (7) Descreva parametricamente e determine a dimensão de cada uma das seguintes variedades M e calcule o espaço tangente e o espaço normal em p :
- (a) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, y > |x|, |z| < 2\}, p = (0, 1, 0)$.
 - (b) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (\sqrt{x^2 + y^2} - 4)^2 + z^2 = 1\}, p = (4, 0, 1)$.
 - (c) $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2/4 + z^2/9 = 3\}, p = (1, 2, 3)$.
- (8) Mostre que $x = r \sinh t, y = r \cosh t$ define um sistema de coordenadas local.