

Análise Matemática III

LISTA 4

(1) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, -y \leq x \leq y\}.$$

- (a) Calcule $\int_S \cos(x^2 + y^2) dx dy$.
- (b) Determine o centróide de S .

(2) Use uma mudança linear de coordenadas para calcular

$$\int_S (x - y)^2 \sin^2(x + y) dx dy$$

onde S é o paralelogramo com vértices $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$ e $(0, \pi)$.

(3) Mostre que:

(a) $\int_S f(x + y) dx dy = \int_{-1}^1 f(u) du$ onde

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| \leq 1\}.$$

- (b) $\int_S f(xy) dx dy = \log(2) \int_1^2 f(u) du$ onde S é a região no primeiro quadrante de \mathbb{R}^2 limitada pelas curvas $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x$ e $y = 4x$.

(4) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 < x < 2, x^2 < y < x^2 + 1\}$$

e a função $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $g(x, y) = (x, y - x^2)$.

- (a) Mostre que g é uma mudança de coordenadas.
- (b) Use g para calcular $\int_S x^2 dx dy$.

(5) Considere o conjunto

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, x^2 - 1 < y < x^2, x^3 < z < x^3 + 2\}$$

e a função $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $g(x, y, z) = (x, y - x^2, z - x^3)$.

- (a) Mostre que g é uma mudança de coordenadas.
- (b) Use g para calcular

$$\int_S \frac{z - x^3}{1 + x^2} dx dy dz.$$

(6) Calcule o volume tri-dimensional dos seguintes conjuntos:

- (a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < z < \sqrt{x^2 + y^2}\}$.
- (b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, y^2 + z^2 \leq x + 1/2, x \leq 3/2 - \sqrt{y^2 + z^2}\}$.

$$(c) S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > 0, y > 0, 0 < z < \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 + z^2 < 1\}.$$

(7) * Para cada $a > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, considere o conjunto

$$B_n(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n |x_i| \leq a \right\}.$$

Prove que o volume n -dimensional de $B_n(a)$ é dado por

$$\text{vol}_n B_n(a) = \frac{(2a)^n}{n!}.$$

Sugestão: Mostre que $\text{vol}_n B_n(a) = a^n \text{vol}_n B_n(1)$ e que $\text{vol}_{n+1} B_{n+1}(1) = 2/(n+1) \text{vol}_n B_n(1)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.