Análise Matemática III

LISTA 9

(1) Indique se, para uma função mensurável f, o conjunto de nível $f^{-1}(\{a\})$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

(2) Considere a σ-álgebra $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ dos conjuntos mensuráveis à Lebesgue em $\mathbb{R}$. Determine se qualquer função monótona $f\colon A \to \mathbb{R}$ com $A \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, é mensurável.

(3) Seja $X\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$X(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Esboce o gráfico da função $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = m\left(\{y \in [0,1]\colon X(y) \le x\}\right).$$

(4) * Considere o espaço de medida de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e uma função $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ limitada e mensurável. Seja $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) = \mu\left(X^{-1}(]-\infty, x])\right),$$

Determine:

(a) a monotonia de F.
(b) se F é uma função mensurável.
(c) $\lim_{x\to+\infty} F(x)$.
(d) $\lim_{x\to-\infty} F(x)$.
(e) $\lim_{x\to a^+} F(x)$.
(f) $\lim_{x\to a^-} F(x)$.
(g) se $\mu(X^{-1}(\{a\})) = 0$ implica que F é contínua em a.

(5) Indique quais as funções simples e para essas calcule os seus integrais relativamente à medida de Lebesgue [1]:

(a) $f = \chi_{[1,+\infty[} + \chi_{]-\infty,-1[}$
(b) $f = 2\chi_{[0,+\infty[} - 3\chi_{]1,+\infty[}$
(c) $f(x) = \begin{cases} x^{-1}, & x \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$
(d) $f(x) = \begin{cases} x, & x^{-1} \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

[1] Note que $[x]$ é a parte inteira de x, i.e. $[x] = \sup\{k \in \mathbb{Z}\colon k \le x\}$.

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1/2,\ 0 \leq y \leq 1 \\ -3, & 1/2 < x < 1,\ 0 \leq y \leq 1/2 \\ 2, & 1/2 < x < 1,\ 1/2 < y < 1 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$

(f) $f = \sum_{k \in \mathbb{N}} (-1)^k k^{-1} \chi_{]0,1/k[}$

(g) $f(x) = [x]\chi_{[-100,100]}$

(h) $f(x,y) = ([x] + [y])\chi_{[0,2]\times[0,2]}(x,y)$

(i) $f(x,y) = \left(\left[\frac{3}{1+x}\right]\chi_{]0,2[}(y) - \left[\frac{2}{1+y}\right]\chi_{]0,3[}(x)\right)\chi_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[}(x,y)$

(6) Seja $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ um espaço de medida onde μ é a medida de contagem. Seja $A = \{a_1, a_2, a_3\} \subset \Omega$ e $f \geq 0$ uma função mensurável.

(a) Decida se $\mathcal{X}_A f$ é uma função simples.

(b) Calcule $\int_A f\, d\mu$.

(7) Para $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, considere a medida de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Prove que:

(a) δ_a é uma medida em $\mathbb{R}^n$.

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d\delta_a = \varphi(a)$ onde φ é uma função simples.

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\delta_a = f(a)$ onde $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(8) Considere um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ e uma função mensurável $f \geq 0$. Mostre que para $\lambda > 0$,

$$\mu\left(\{x \in \Omega \colon f(x) \geq \lambda\}\right) \leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega f\, d\mu.$$