Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 6

(1) Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Mostre que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

Sugestão: Use a função auxiliar $\varphi(x) = f(x) - x$.

(2) Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e tal que a sua restrição a $\mathbb{Q}$ é nula (i.e. $f|_{\mathbb{Q}} = 0$). Diga qual a restrição de f a $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (i.e. $f|_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$).

(3) Considere uma função $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Prove que:
- (a) Não há nenhuma sucessão x_n em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = n$.
- (b) Se há uma sucessão x_n em $[0,1]$ tal que $g(x_n) = 1/n$, então existe $c \in [0,1]$ que satisfaz $g(c) = 0$.

(4) Determine o domínio de diferenciabilidade e calcule as derivadas de cada uma das seguintes funções:
- (a) $x \mapsto \operatorname{tg}(x) - x$
- (b) $x \mapsto (x + \cos x)/(1 - \sin x)$
- (c) $x \mapsto e^{\operatorname{arctg} x}$
- (d) $x \mapsto e^{\log^2 x}$
- (e) $x \mapsto x \sin(x) \operatorname{tg}(x)$
- (f) $x \mapsto x^2(1 + \log x)$
- (g) $x \mapsto (\log x)^x$
- (h) $x \mapsto x^{x^{x-1}}$
- (i) $x \mapsto x|x|$
- (j) $x \mapsto e^{-|x|}$
- (k) $x \mapsto \log |x|$
- (l) $x \mapsto e^{x-|x|}$

(5) Considere a função $\phi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\phi(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Mostre que ϕ é diferenciável em $\mathbb{R}$.
- (b) Determine a equação da recta tangente ao gráfico de ϕ no ponto $(a, \phi(a))$.

(6) (*) Diga em que pontos a função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável, onde

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 2x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

(7) Calcule, se possível, as derivadas laterais $\mu'(0^-)$ e $\mu'(0^+)$ de $\mu\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{-1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

(8) Sendo $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciável, calcule, em função de f', $(\operatorname{arctg} f(x) + f(\operatorname{arctg} x))'$.

(9) Considere a função $\theta\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\theta(x) = \begin{cases} a + bx, & x \leq 0 \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

(a) Diga se θ é diferenciável em 1 e, em caso afirmativo, escreva a equação da recta tangente ao gráfico de θ nesse ponto.
(b) Determine os valores de a e b para os quais θ é diferenciável.
(c) Defina θ' e diga se $\theta \in C^1(\mathbb{R})$.