Análise Matemática III

LISTA 7

(1) Mostre as seguintes proposições:
  (a) Qualquer intervalo é Lebesgue-mensurável.
  (b) Se A_k, $k \in \mathbb{N}$, são conjuntos mensuráveis, então
$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$$
  também é mensurável.
  (c) $\mathcal{F} = \big\{\emptyset, \{0\}, \mathbb{R}^-, \mathbb{R}_0^-, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}\setminus\{0\}, \mathbb{R}\big\}$ é uma σ-álgebra.

(2) Encontre uma fórmula para $m(A \cup B \cup C)$ em termos das medidas de cada um dos conjuntos e das suas intersecções.

(3) (Conjunto de Cantor) Considere $A_0 = [0,1]$. Divida-o em três partes iguais e retire o intervalo aberto do meio $I_1 =]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Obtemos assim $A_1 = I_0 \cup I_2$ onde $I_0 = [0, \frac{1}{3}]$ e $I_2 = [\frac{2}{3}, 1]$. Repita o processo para I_0 e I_1, obtendo $A_2 = I_{00} \cup I_{02} \cup I_{20} \cup I_{22}$ onde $I_{00} = [0, \frac{1}{9}]$, etc. Continuando, temos uma sucessão de conjuntos A_n.
  (a) Prove que $A = \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ é não vazio.
  (b) Prove que A tem medida nula.
  (c) *Prove que A não é numerável.
  Sugestão: Escreva $x \in [0,1]$ na forma ternária
$$x = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_k}{3^k},$$
  onde $a_k \in \{0,1,2\}$. Note que $x \in A$ sse $a_k \in \{0,2\}$ para qualquer $k \in \mathbb{N}$.
  (d) **Considere a função de Cantor $f\colon [0,1] \to [0,1]$ dada por
$$f(x) = \frac{1}{2^N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{a_k}{2^{k+1}}$$
  onde $x = \sum_k a_k/3^k$, $a_k \in \{0,1,2\}$, e $N = \inf\{k\colon a_k = 1\}$. Mostre que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, f é crescente, constante em cada subintervalo de $[0,1]\setminus A$, contínua em $[0,1]$, $f' = 0$ q.t.p, $f(1-x) = x$ e $2f(x/3) = f(x)$.