Análise Matemática III

LISTA 8

(1) Mostre que $\mathcal{A} = \{[a, +\infty[: a \in \mathbb{R}\}$ gera a σ-álgebra de Borel em $\mathbb{R}$.

(2) Dado $\alpha \in [0, 1]$, considere o conjunto[1]

$$A_\alpha = (\alpha + \mathbb{Q}) \cap [0, 1].$$

(a) Determine $\cup_{\alpha \in [0,1]} A_\alpha$ e $m(A_\alpha)$.
(b) Mostre que se $A_\alpha \cap A_\beta \neq \emptyset$, então $A_\alpha = A_\beta$.
(c) Mostre que $A_\alpha \cap A_\beta = \emptyset$ sse $\alpha - \beta \notin \mathbb{Q}$.
(d) *Considere o conjunto E constituído por um único elemento a_α de cada A_α distinto[2]. Seja então $E_n = (q_n + E) \cap [0, 1]$, $n \in \mathbb{N}$, onde q_n representa uma sucessão que ordena os racionais.
  (i) Determine $\cup_n E_n$, $m(\cup_n E_n)$ e $m(E_n) - m(E)$.
  (ii) Mostre que $E_i \cap E_j = \emptyset$, $i \neq j$.
  Sugestão: Suponha que existe $x \in E_i \cap E_j$.
  (iii) Calcule $\sum_n m(E_n)$ e compare com $m(\cup_n E_n)$. Conclua que E não é Lebesgue mensurável.

(3) Seja $\Omega = \{0, 1\}^N \subset \mathbb{R}^N$, i.e. os elementos de Ω são vectores em $\mathbb{R}^N$ com componentes 0 ou 1. Considere a medida $\mu \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ definida para cada $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$ por $\mu(\{\omega\}) = \frac{1}{2^N}$.

Dados $a_1, \ldots a_m \in \{0, 1\}$ com $1 \leq m \leq N$, definimos

$$A_{a_1,\ldots,a_m} = \{\omega \in \Omega \colon \omega_i = a_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

e $\mathcal{A}_m = \{A_{a_1,\ldots,a_m} \colon a_i \in \{0, 1\}\}$.
(a) Mostre que μ é uma medida de probabilidade.
(b) Calcule $\mu(A_{a_1,\ldots,a_m})$.
(c) Determine a σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_2$.
(d) Mostre que o cardinal da σ-álgebra gerada por $\mathcal{A}_m$ é 2^{2^m}.

(4) Demonstre as seguintes proposições:
(a) Qualquer função monótona $f \colon A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}$, é mensurável.
(b) Se f é uma função mensurável, então o conjunto de nível $f^{-1}(\{a\})$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$.

[1] Recorde que para $a \in \mathbb{R}$ e $A \in \mathbb{R}$, a translação de A por a é o conjunto $a + A = \{a + x \in \mathbb{R} \colon x \in A\}$.

[2] Este conjunto existe pela aplicação do axioma da escolha.