

1 Complementos de Álgebra Linear

Exercício 1.1. Para cada uma das matrizes seguintes, calcule os valores próprios e, se forem reais, determine os vetores próprios correspondentes, identificando em cada caso as multiplicidades algébrica e geométrica

$$a) \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad f) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad h) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad i) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Solução: a) $\lambda_1 = -5$, $m.a. = 1$; vetores próprios $u = (c, c)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
 $\lambda_2 = -1$, $m.a. = 1$; vetores próprios $u = (7/3c, c)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
b) O polinómio característico não tem raízes reais ($\lambda_1 = 4 + 2i$, $\lambda_2 = 4 - 2i$);
c) $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$; $m.a. = 1$; vetores próprios $u = ((1 + \sqrt{2})c, c)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
 $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$; $m.a. = 1$; vetores próprios $u = ((1 - \sqrt{2})c, c)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
d) $\lambda = 0$, $m.a. = 2$; vetores próprios $u = (c, 0)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
e) $\lambda_1 = 2$, $m.a. = 1$; vetores próprios $u = (c, 0, 0)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
 $\lambda_2 = 3$, $m.a. = 1$; vetores próprios $u = (0, c, 0)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
 $\lambda_3 = 4$, $m.a. = 1$; vetores próprios $u = (0, 0, c)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
f) $\lambda_1 = 3$, $m.a. = 2$; vetores próprios $u = (-c, 0, c)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
 $\lambda_2 = -1$, $m.a. = 1$; vetores próprios $u = (c, 0, c)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
g) $\lambda_1 = 0$, $m.a. = 2$; vetores próprios $u = (-c_1 - c_2, c_1, c_2)$, com c_1 e c_2 não simultaneamente nulos, $m.g. = 2$;
 $\lambda_2 = 3$, $m.a. = 1$; vetores próprios $u = (c, c, c)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
h) $\lambda = 1$, $m.a. = 3$; vetores próprios $u = (c, 0, 0)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$;
i) $\lambda_1 = 2$, $m.a. = 2$; vetores próprios $u = (c_1, c_1, c_2)$, com c_1 e c_2 não simultaneamente nulos, $m.g. = 2$;
 $\lambda_2 = 0$, $m.a. = 1$; vetores próprios $u = (-c, c, 0)$, com $c \neq 0$, $m.g. = 1$.

Exercício 1.2. Prove que

- λ é um valor próprio de A sse for valor próprio de A^T ;
- se λ for valor próprio de A e $|A| \neq 0$, então $\lambda \neq 0$ e $\frac{1}{\lambda}$ é valor próprio da matriz inversa A^{-1} ;
- se λ for valor próprio de A então λ^k é valor próprio da matriz A^k , $k \in \mathbb{N}$.
- se u e v forem vetores próprios de A associados a um mesmo valor próprio λ , então $u + v$ e tu também são vetores próprios de A associados ao mesmo λ , $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Exercício 1.3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

- a) Calcule os valores próprios de A e os respectivos vetores próprios;
 b) Determine os valores próprios e vetores próprios de A^{100} (sugestão: use um dos resultados enunciados no exercício anterior).

Solução: a) $\lambda_1 = -5$, vetores próprios $u = (-2/3c, c)$, com $c \neq 0$; $\lambda_2 = 5$, vetores próprios $u = (c, c)$, com $c \neq 0$;
 b) $\lambda = 5^{100}$, vetores próprios $u = (-2/3c_1, c_1) + (c_2, c_2)$, com c_1, c_2 não simultaneamente nulos;

Exercício 1.4. Considere a matriz A e o vetor \mathbf{x} definidos por

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

- a) Identifique o polinómio característico, $P(\lambda)$, associado à matriz A ;
 b) Determine os valores próprios de A ;
 c) Calcule $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$;
 d) Sejam $a, b \geq 0$. Sem efetuar qualquer cálculo, mostre que existe um vetor \mathbf{x} não nulo, para o qual $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = 0$;
 e) Classifique $\mathbf{x}^T A \mathbf{x}$ para todos os possíveis valores de $a, b \in \mathbb{R}$.

Solução: a) $P(\lambda) = (b - \lambda)(-\lambda)(2a - \lambda)$; b) $\lambda_1 = b, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 2a$; c) $\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = ax^2 + 2axy + ay^2 + bz^2$;
 e) SDP se $(a \geq 0 \text{ e } b \geq 0)$; SDN se $(a \leq 0 \text{ e } b \leq 0)$;
 Ind. nos restantes casos, isto é, $(a > 0 \text{ e } b < 0)$ ou $(a < 0 \text{ e } b > 0)$.

Exercício 1.5. Classifique as seguintes formas quadráticas

- a) $q(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$
 b) $q(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$
 c) $q(x, y) = x^2 - y^2$
 d) $q(x, y, z) = x^2 + 4xy - 2xz + 7y^2 - 3z^2$
 e) $q(x, y, z) = x^2 - 4xy + 4xz - z^2$
 f) $q(x, y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$
 g) $q(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$
 h) $q(x, y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$
 i) $q(x, y, z) = 3y^2 + 4xz$
 j) $q(x, y) = x^2 + 4xy + ay^2$ (onde $a \in \mathbb{R}$).

Solução: a)SDP b)SDP c)Ind. d)Ind. e)Ind. f)DP g)Ind. h)Ind. i)Ind. j)Ind se $a < 4$, SDP se $a = 4$ e DP se $a > 4$.

Exercício 1.6. Classifique as seguintes matrizes simétricas (quanto a serem definidas positivas, semi-definidas positivas, negativas, semi-definidas negativas)

ou indefinidas)

$$\begin{array}{lll}
 a) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} & b) \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} & c) \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \\
 d) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} & e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} & f) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix} \\
 g) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} & h) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} & i) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \\
 j) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

Solução: a) DP b) Ind. c) DN d) Ind. se $a < 4$, SDP se $a = 4$ e DP se $a > 4$
e) Ind. f) SDP g) Ind. h) Ind. se $a < -\sqrt{2} \vee a > \sqrt{2}$, DP se $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$
e SDP se $a = \pm\sqrt{2}$ i) DN j) Ind.

2 Generalidades sobre Funções de Várias Variáveis

Exercício 2.1. Determine os domínios das seguintes funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} e represente-os graficamente

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x, y) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{1 - \ln x} & b) f(x, y) = \frac{\sqrt{e - e^x}}{\ln(4 - x^2 - y^2)} \\
 c) f(x, y) = \ln(x - y)^2 & d) f(x, y) = \frac{\sqrt[3]{x + y}}{\ln x^2 - \ln(3 - x)^2} \\
 e) f(x, y) = \ln(x - y)\sqrt{(y - x)(x^2 + y^2 - 1)}
 \end{array}$$

Solução: a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge x \neq e \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$ b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 1 \wedge x^2 + y^2 < 4 \wedge x^2 + y^2 \neq 3\}$ c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$ d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq 3/2\}$ e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y > 0 \wedge x^2 + y^2 - 1 \leq 0\}$

Exercício 2.2. Determine os domínios das seguintes funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}^3

$$\begin{array}{l}
 a) (x, y) = \left(\frac{\sqrt{x + y}}{x - y}, x^2 y, \ln(x^2 - y) \right) \\
 b) (x, y) = \left(\ln(xy)^2, \frac{1}{\ln(2x + y)}, \sqrt{x + y} \right)
 \end{array}$$

Solução: a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, x \neq y, x^2 - y > 0\}$
 b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0, y \neq 0, 2x + y > 0, 2x + y \neq 1, x + y \geq 0\}$

3 Limites e Continuidade

Exercício 3.1. Determine o interior, exterior e fronteira de cada um dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2 . Classifique-os relativamente a serem abertos, fechados e limitados.

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 < 4\}$$

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 9\}$$

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$$

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1\}$$

Solução: $int(A) = A$, $fr(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4\}$, $ext(A) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 2)^2 > 4\}$, A é aberto e limitado. $int(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 9\}$, $fr(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$, $ext(B) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$, B é fechado e não é limitado. $int(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} < 1\}$, $fr(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1\}$, $ext(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} > 1\}$, C é fechado e limitado. $int(D) = \emptyset$, $fr(D) = D$, $ext(D) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x - 2)^2}{4} + \frac{(y + 1)^2}{9} \neq 1\}$, D é fechado e limitado.

Exercício 3.2. Represente graficamente o domínio D_f , indique analiticamente $int(D_f)$, $fr(D_f)$, $ad(D_f)$ e D'_f e diga, justificando, se D_f é aberto ou fechado, se é limitado e se é compacto, para cada uma das seguintes funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} :

$$a) f(x, y) = \frac{|x| - 4}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$$

$$b) f(x, y) = \sqrt{x(1 - x)} + \frac{\ln(x^2 - y)}{\sqrt{y + x}}$$

$$c) f(x, y) = \sqrt{y + x - 1} \cdot \ln(4 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2)$$

$$d) f(x, y) = \sqrt{x - |y|} + \sqrt{2 - y^2 - x}$$

$$e) f(x, y) = x\sqrt{y^2 - 4} + \sqrt[4]{16 - x^2 - y^2}$$

Solução: a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - x^2 - y^2 > 0 \wedge \ln(4 - x^2 - y^2) \neq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4 \wedge x^2 + y^2 \neq 3\}$, $int(D_f) = D_f$, $fr(D_f) = \{(x, y) \in$

$\mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 4 \vee x^2 + y^2 = 3$, $ad(D_f) = D'_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}$.
 D_f é aberto, não é fechado, é limitado mas não é compacto.

b) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x(1-x) \geq 0 \wedge x^2 - y > 0 \wedge y + x > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge -x < y < x^2\}$, $int(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1 \wedge -x < y < x^2\}$,
 $fr(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y = x^2 \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (y = -x \wedge 0 \leq x \leq 1) \vee (x = 1 \wedge -x \leq y \leq x^2)\}$, $ad(D_f) = D'_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (0 \leq x \leq 1) \wedge (-x \leq y \leq x^2)\}$. D_f não é aberto nem fechado, é limitado mas não é compacto.

c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y + x - 1 \geq 0 \wedge 4 - (x + 1)^2 - (y - 1)^2 > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 < 4\}$, $int(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 < 4\}$, $fr(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4\}$,
 $ad(D_f) = D'_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 1 - x \wedge (x + 1)^2 + (y - 1)^2 \leq 4\}$. D_f não é aberto nem fechado, é limitado mas não é compacto.

d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| \geq 0 \wedge 2 - y^2 - x \geq 0\}$, $int(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| > 0 \wedge 2 - y^2 - x > 0\}$, $fr(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| = 0 \wedge 2 - y^2 - x \geq 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| \geq 0 \wedge 2 - y^2 - x = 0\}$, $ad(D_f) = D'_f = D_f$. D_f não é aberto, é fechado, é limitado e portanto é compacto.

e) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 4 \geq 0 \wedge 16 - x^2 - y^2 \geq 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 2 \vee y \leq -2) \wedge x^2 + y^2 \leq 16\}$, $int(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y > 2 \vee y < -2) \wedge x^2 + y^2 < 16\}$, $fr(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y = 2 \vee y = -2) \wedge x^2 + y^2 \leq 16\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y \geq 2 \vee y \leq -2) \wedge x^2 + y^2 = 16\}$, $ad(D_f) = D'_f = D_f$. D_f não é aberto, é fechado, é limitado e portanto é compacto.

Exercício 3.3. Determine o domínio da função f de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R} definida por

$$f(x, y) = \frac{\ln(x^2 + y^2 - 4)}{|x| - 4}.$$

Faça a sua representação gráfica e mostre que D_f é um conjunto aberto e ilimitado. Averigue se $ext(D_f)$ também é aberto e ilimitado.

Solução: $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4 > 0 \wedge |x| - 4 \neq 0\}$. $Ext(D_f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$ e portanto é um conjunto aberto e limitado.

Exercício 3.4. Determine o interior, a fronteira, a aderência e os pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de \mathbb{R}^2

a) $A = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$

b) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$

c) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Solução: a) $int(A) = \emptyset, fr(A) = A, ad(A) = A, A' = \emptyset$. b) $int(B) = \emptyset, fr(B) = B \cup \{(0, 0)\}, ad(B) = fr(B), B' = \{(0, 0)\}$. c) $int(C) = \emptyset, fr(C) = C \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y = 0\}, ad(C) = fr(C), C' = fr(C)$.

Exercício 3.5. Calcule os seguintes limites de sucessões de pontos em \mathbb{R}^2 (caso existam):

$$a) \lim \left(\left(\frac{2n^2 + 3}{1 + 2n^2} \right)^{n^2}, \ln \left(\frac{2n}{2n + 1} \right)^{n + \frac{1}{2}} \right)$$

$$b) \lim \left(n^3 + n - n^2 - 1, \sqrt{n} \frac{\sqrt{n} + 3}{(\sqrt{n} + 1)^2} \right)$$

$$c) \lim \left(n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right), \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

Solução: a) $(e, -\frac{1}{2})$; b) não existe c) não existe.

Exercício 3.6. Calcule, caso exista, $\lim \bar{x}_n$ com:

$$a) \bar{x}_n = \left[\frac{n}{2n+1}, \left(1 + \frac{2}{n}\right)^n, \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right]$$

$$b) \bar{x}_n = \left[\sqrt{n} - \sqrt{n-1}, n(\sqrt[n]{e} - 1), n \ln \frac{n+2}{n}, \left(1 - \frac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}}, \left(\frac{n^2+1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{3}} \right]$$

Solução: a) $(1/2, e^2, 1)$; b) $(0, 1, 2, 0)$.

Exercício 3.7. Estude a existência dos seguintes limites

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1}{(x-1)(y-2)}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{1}{x^2 + y^2} \quad d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \ln(x^2 + y^2)$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} e^{xy}$$

Solução: a) 0 b) não existe c) 1/5 d) $-\infty$ e) 1

Exercício 3.8. Estude a existência de limite no ponto $(0,0)$ para as seguintes

funções

$$a) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x(x + y)}$$

$$b) f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$$

$$c) f(x, y) = \frac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$d) f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

$$e) f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$f) f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$$

$$g) f(x, y) = \frac{x^2(x + y)}{x^2 + y^2}$$

$$h) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2 + 2x^3}{x^2 + y^2}$$

$$i) f(x, y) = \begin{cases} \frac{y}{x} \sqrt{x^2 + y^2}, & \text{se } x > 0, y > 0 \\ 0, & \text{se } x < 0 \text{ ou } y < 0. \end{cases}$$

Solução: a) Não existe b) 0 c) Não existe d) 0 e) Não existe f) Não existe g) 0 h) Não existe i) Não existe.

Exercício 3.9. Determine, caso exista, o prolongamento por continuidade à origem de cada uma das funções do exercício anterior.

Solução: Relativamente às alíneas em que o limite não existe, não é possível obter o referido prolongamento. Relativamente às outras, basta definir o valor da função na origem como sendo o respetivo limite. Por exemplo, na alínea b) o prolongamento é

$$\begin{cases} f(x, y), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & x = y = 0 \end{cases}.$$

Exercício 3.10. Estude a existência dos seguintes limites

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2} \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,-3)} \frac{\sin(x-1)(y+3)}{\sqrt{(x-1)(y+3)}}$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{3(x-2)^2(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2} \quad d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{x^2 - y^2 - 1}{x - 1} \quad f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$$

$$g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{x^2 \sqrt{|y-1|}}{x^2 + (y-1)^2} \quad h) \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Solução: a) não existe b) 1 c) 0 d) não existe e) não existe f) 1
 g) 0 h) 0.

Exercício 3.11. Considere a função f de \mathbb{R}^2 para \mathbb{R} definida por

$$f(x, y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}.$$

- a) Indique o domínio de f .
 b) Mostre que $x^3 - y^3$ é múltiplo de $x - y$.
 c) Pode a função f ser prolongada por continuidade à reta $y = x$?

Solução: a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$. c) Sim, basta definir o valor de f em pontos da reta como sendo $f(x, x) = 3x^2$.

Exercício 3.12. Considere a função $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 - y^2}$.

- a) Calcule $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0), \\ y=x+x^2}} f(x, y)$. O que pode concluir sobre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?
 b) Calcule $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0), \\ y=mx}} f(x, y)$, $|m| \neq 1$. O que pode concluir sobre $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$?

?

Solução:

- a) $-\frac{1}{2}$. Se existir $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, é $-\frac{1}{2}$. b) 0. Não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ ($0 \neq -\frac{1}{2}$).

Exercício 3.13. Seja $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma função definida por

$$\mathbf{f}(x, y) = \left(\frac{x^2 y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}, xy + 2, \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \right).$$

Estude a existência de $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \mathbf{f}(x, y)$.

Solução: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \mathbf{f}(x, y) = (1, 2, 1)$.

4 Cálculo Diferencial

Exercício 4.1. Determine as derivadas parciais de primeira ordem de cada uma das seguintes funções e defina os respectivos domínios:

$$\text{a) } f(x, y, z) = 3xy + x^2 - zy + z^2; \quad \text{b) } f(x, y) = \begin{cases} x^2 - yx, & y \neq x \\ x, & y = x. \end{cases}$$

Solução: a) $f'_x = 3y + 2x$; $f'_y = 3x - z$; $f'_z = -y + 2z$; $\mathcal{D}f'_x = \mathcal{D}f'_y = \mathcal{D}f'_z = \mathbb{R}^3$
 b) $f'_x = 2x - y$ se $x \neq y$ e $f'_x = 0$ se $x = y = 0$; $f'_y = -x$ se $x \neq y$ e $f'_y = 0$ se $x = y = 0$
 $\mathcal{D}f'_x = \mathcal{D}f'_y = \mathbb{R}^2 \setminus \{(a, a) : a \neq 0\}$

Exercício 4.2. Mostre que $f(x, y) = \frac{x - y + 1}{x + y}$ é solução da equação

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x + y}$$

em qualquer dos semiplanos abertos $x + y > 0$ ou $x + y < 0$.

Exercício 4.3. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x-y} - (x - y + 1)}{x - y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

- a) Estude a continuidade de $f(x, y)$ no ponto $(1, 1)$.
 b) Verifique que $f'_x(a, a) + f'_y(a, a) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

Solução:

a) f é contínua no ponto $(1, 1)$.

Exercício 4.4. Dada a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases},$$

indique segundo que vetores existe derivada na origem e calcule o seu valor.

Solução: $\partial_{\vec{v}} f(0, 0)$ existe para $\vec{v} = (\alpha, \alpha)$ e $\vec{v} = (\alpha, -\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nesse caso, $\partial_{\vec{v}} f(0, 0) = 0$.

Exercício 4.5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

a) Mostre que a função admite derivada na origem segundo qualquer vetor e calcule-a.

b) Mostre também que f não é contínua em $(0, 0)$.

c) Sem fazer qualquer cálculo, indique o valor de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e de $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

Solução: a) $\partial_{(\alpha, \beta)} f(0, 0) = \begin{cases} \frac{\beta^2}{\alpha} & \text{se } \alpha \neq 0 \\ 0 & \text{se } \alpha = 0 \end{cases}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$ c)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Exercício 4.6. Estude a diferenciabilidade das seguintes funções nos pontos indicados e escreva as expressões dos respectivos diferenciais de primeira ordem (no caso das funções diferenciáveis):

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, no ponto $(0, 0)$;

b) $f(x, y) = \begin{cases} x + y, & x \neq y \\ x + 1, & x = y \end{cases}$, em $(1, 1)$;

c) $f(x, y) = \begin{cases} xy - 2y + 3x, & x \neq y \\ x^2y^2 + 3x - 2y, & x = y \end{cases}$, em $(0, 0)$;

d) $\mathbf{y}(x) = (x^2 + 1, x)$, em $x = 1$;

Solução:

a) f é diferenciável em $(0, 0)$; $Df(0, 0)(\mathbf{h}) = 0$; b) f não é diferenciável em $(1, 1)$; c) f é diferenciável em $(0, 0)$; $Df(0, 0)(\mathbf{h}) = 3h_1 - 2h_2$; d) \mathbf{y} é diferenciável em $x = 1$; $D\mathbf{y}(1)(h) = (2h, h)$.

Exercício 4.7. Escreva as expressões do diferencial de primeira ordem das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x, y) = y^x$, num ponto genérico (a, b) , com $b > 0$;

b) $f(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 - x_2 + x_3}{\sqrt{x_3 - 1}}$, no ponto $(1, -3, 2)$.

Nota: Admita à partida que as funções são diferenciáveis.

Solução: a) $Df(a, b)(\mathbf{h}) = b^a \ln b \cdot h_1 + ab^{a-1} \cdot h_2$ b) $Df(1, -3, 2)(\mathbf{h}) = h_1 - h_2 - 2h_3$.

Exercício 4.8. Mostre que são contínuas e que não são diferenciáveis nos pontos indicados, as funções

$$\text{a) } f(x, y) = \begin{cases} \frac{-3x(y-2)^2 + x^3}{x^2 + (y-2)^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 2) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 2) \end{cases}, \text{ em } (0, 2);$$

$$\text{b) } g(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = y = 0, \end{cases}, \text{ em } (0, 0);$$

$$\text{c) } h(x, y) = \sqrt{|x|} \cos y, \text{ em } (0, 0).$$

Exercício 4.9. Utilize a regra da derivação da função composta para calcular

$$\text{a) } \frac{df}{dt}, \text{ onde } f = x^2 y^3, \text{ sendo } x = te^t \text{ e } y = t^2 + 1;$$

$$\text{b) } \frac{df}{dt}, \text{ onde } f = u^2 + v^3, \text{ sendo } u = \frac{x}{y}, v = (x + 2y)^3 \text{ e } x = \frac{1}{t}, y = tg t;$$

$$\text{c) } \frac{dz}{dt}, \text{ supondo que } z = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ e } x = \cos t, y = \sin t.$$

$$\text{d) } \nabla f(1, 1), \text{ onde } f(x, y) = \sin(2u - v^3 + w), \text{ sendo } u = e^{x^2 - y}, v = xy^2 \text{ e } w = x^3 y^2;$$

$$\text{e) } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1, 1), \text{ onde } f(x, y, z) = (u^2 - 3v)^5, \text{ com } u = e^{\frac{xy}{z}} \text{ e } v = \ln(y^2 z^3);$$

$$\text{f) } \nabla f(1, 2, 3), \text{ onde } f(x, y, z) = g(u, v, w), \text{ com } u = 5x + 3z, v = 8x + 2y, w = -y + z \text{ e sabendo que } \nabla g(14, 12, 1) = (4, 5, 6).$$

Solução:

$$\text{a) } \frac{df}{dt} = 2te^{2t}(t+1)(t^2+1)^3 + 6t^3e^{2t}(t^2+1)^2;$$

$$\text{b) } \frac{df}{dt} = -2\frac{1}{t^3} \frac{1}{tg^2} \frac{1}{t} - 2\frac{1}{t^2} \frac{\sec^2 t}{tg^3} \frac{1}{t} + 9\left(-\frac{1}{t^2} + 2\sec^2 t\right)\left(\frac{1}{t} + 2tg t\right)^8; \text{ c) } \frac{dz}{dt} = 2 - 4\sin^2 t; \text{ d) } \nabla f(1, 1) = (4\cos 2, -6\cos 2); \text{ e) } \frac{\partial f}{\partial y}(0, 1, 1) = -30; \text{ f) } \nabla f(1, 2, 3) = (60, 4, 18).$$

Exercício 4.10. Se a função $f(u, v, w)$ é diferenciável no ponto $u = x - y$, $v = y - z$ e $w = z - x$, prove que, com $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \equiv 0.$$

Exercício 4.11. Dada a função

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^2 y^2}{(x-1)^2 + y^2}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

a) Determine as funções derivadas $g'_x(x, y)$ e $g'_y(x, y)$, indicando onde são definidas.

b) Mostre que $g'_x(x, y)$ e $g'_y(x, y)$ são funções contínuas em \mathbb{R}^2 .

c) Estude a diferenciabilidade da função no ponto $(1, 0)$.

d) Estude a continuidade da função no ponto $(1, 0)$.

Solução: a) $g'_x(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x-1)y^4}{((x-1)^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$

$g'_y(x, y) = \begin{cases} \frac{2(x-1)^4 y}{((x-1)^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (1, 0) \\ 0, & (x, y) = (1, 0) \end{cases}$

Assim, $D_{g'_x} = D_{g'_y} = \mathbb{R}^2$. c) g é diferenciável em $(1, 0)$. d) g é contínua em $(1, 0)$.

Exercício 4.12. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

a) Calcule $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

b) Determine $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ e mostre que é descontínua em $(0, 0)$.

c) Verifique que f é diferenciável na origem.

d) Calcule $\partial_{(\frac{3}{5}, \frac{4}{5})} f(0, 0)$.

e) Estude a continuidade de f na origem.

Solução:

a) $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$;

b) $f'_y(x, y) = \begin{cases} 2y \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} - y \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cos \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$; d) 0;

e) f é contínua em $(0, 0)$.

Exercício 4.13. Utilize a função

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin x}{y}, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

e o ponto $(0, 0)$ para mostrar que o facto de uma função ter derivadas parciais finitas num ponto não significa que seja contínua nesse ponto. A função dada será diferenciável no ponto $(0, 0)$? Justifique.

Solução:

A função não é contínua em $(0,0)$, e portanto também não é diferenciável nesse ponto.

Exercício 4.14. Considere a função definida em \mathbb{R}^2 por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x| + |y|}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- a) Prove que f é contínua em $(0,0)$.
 b) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
 c) Verifique que f não é diferenciável em $(0,0)$. Sem fazer cálculos, o que pode concluir sobre a continuidade de $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ em $(0,0)$?

Solução:

b) $f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$ c) Como f não é diferenciável em $(0,0)$, pelo menos uma das funções f'_x ou f'_y (ou ambas) não é contínua em $(0,0)$.

Exercício 4.15. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x(x-y)}{x+y} & \text{se } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{se } x+y = 0 \end{cases}$$

- a) Estude a continuidade de f no ponto $(0,0)$ (sugestão: calcule o limite segundo a parábola de equação $y = -x + x^2$).
 b) Calcule a função derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x}$ e estude a sua continuidade em $(0,0)$.
 c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.
 d) Mostre que $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq \partial_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(0,0)$. Comente esse resultado.

Solução:

- a) f não é contínua em $(0,0)$.
 b) $f'_x(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{(x+y)^2}$ se $x+y \neq 0$ e $f'_x(x, y) = 1$ se $(x, y) = (0,0)$ (não existe $f'_x(a, -a)$, $a \neq 0$); a função $f'_x(x, y)$ não é contínua em $(0,0)$.
 c) f não é diferenciável em $(0,0)$.
 d) Os dois valores só teriam de ser iguais se a função f fosse diferenciável em $(0,0)$.

Exercício 4.16. Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ e $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y}$, para $f(x, y, z) = z^2 x^2 y + x y e^z$.

Solução: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2yz^2$, $\frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y} = 4z$.

Exercício 4.17. Calcule f''_{x^2} , f''_{xy} e f'''_{xyx} para cada uma das seguintes funções, indicando os respectivos domínios:

$$a) f(x, y) = x \sin(x + y); \quad b) f(x, y) = \begin{cases} y \sin x, & y \neq 0 \\ 2, & y = 0 \end{cases}$$

Solução:

a) $f''_{x^2} = 2 \cos(x + y) - x \sin(x + y)$, $f''_{xy} = \cos(x + y) - x \sin(x + y)$ e $f'''_{xyx} = -2 \sin(x + y) - x \cos(x + y)$.

b) $f''_{x^2} = -y \sin x$, $f''_{xy} = \cos x$ e $f'''_{xyx} = -\sin x$;

Exercício 4.18. Calcule a segunda, terceira e quarta diferenciais de $f(x, y) = \sqrt{xy}$ no ponto $(1, 1)$.

Solução:

$$\begin{aligned} D^2 f(1, 1)(\mathbf{h}^2) &= -\frac{1}{4}h_1^2 + \frac{1}{2}h_1 h_2 - \frac{1}{4}h_2^2, \\ D^3 f(1, 1)(\mathbf{h}^3) &= \frac{3}{8}h_1^3 - \frac{3}{8}h_1^2 h_2 - \frac{3}{8}h_1 h_2^2 + \frac{3}{8}h_2^3, \\ D^4 f(1, 1)(\mathbf{h}^4) &= -\frac{15}{16}h_1^4 + 4\frac{3}{16}h_1^3 h_2 + 6\frac{1}{16}h_1^2 h_2^2 + 4\frac{3}{16}h_1 h_2^3 - \frac{15}{16}h_2^4. \end{aligned}$$

Exercício 4.19. Escreva a expressão geral da n -ésima diferencial da função $f(x, y) = \sin(x + y)$ no ponto $(0, 0)$.

Solução: $D^n f(0, 0)(\mathbf{h}) = \sin(n\pi/2) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} h_1^i h_2^{n-i}$

Exercício 4.20. Mostre que $f(x, y) = \ln(e^x + e^y)$ satisfaz a equação diferencial

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 = 0$$

em todos os pontos de \mathbb{R}^2 .

Exercício 4.21. Seja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ uma função real tal que $\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0) =$

1. Seja $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = f(y \sin x, y^2)$.

Mostre que a matriz hessiana de g em $(0, 0)$ é $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercício 4.22. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = xy^2 + g(u, v, w), \text{ com } u = \sin y^2, v = \ln x \text{ e } w = ye^x.$$

Sabendo que a função g é de classe $C^2(\mathbb{R}^3)$, calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0)$.

Solução: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1, 0) = e \left(\frac{\partial^2 g}{\partial w \partial v}(0, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial w}(0, 0, 0) \right).$

Exercício 4.23. *Mostre que as funções seguintes são homogêneas ou positivamente homogêneas. Determine o grau de homogeneidade e verifique a identidade de Euler:*

a) $f(x, y) = \ln \frac{(x+y)^2}{xy}$

b) $f(x, y, z) = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2}$

c) $f(x, y) = \begin{cases} (x+y) \sin\left(\frac{xy}{x^2 + y^2}\right), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$

Solução:

- a) f é homogênea de grau 0;
 b) f é positivamente homogênea de grau -1 ;
 c) f é homogênea de grau 1.

Exercício 4.24. *Estude a homogeneidade de $g(x, y, z) = x^2 + x^\alpha y^{\beta-3} - z^{3\alpha} y^\beta$ e de $h(x, y) = \frac{x^3 y^\alpha + x^{\beta-1}}{y^{3-\beta}}$, fazendo a discussão em função dos parâmetros α e β reais:*

- a) *Recorrendo diretamente à definição.*
 b) *Utilizando a identidade de Euler.*

Solução:

g é homogênea de grau 2 para $\alpha = -\frac{3}{2}$ e $\beta = \frac{13}{2}$;
 h é homogênea de grau $\alpha + \beta$ para $\beta = \alpha + 4, \alpha \in \mathbb{R}$.

Exercício 4.25. *Se $g(u, v)$ diferenciável em $\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x}\right)$, com $x, y \neq 0$, prove que a função*

$$f(x, y, z) = x^2 \cdot g\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x}\right),$$

verifica a identidade $x \cdot f'_x + y \cdot f'_y + z \cdot f'_z \equiv 2 \cdot f$. Interprete este resultado em termos de homogeneidade.

Solução:

f é positivamente homogênea de grau 2.

Exercício 4.26. *Se $f(\mathbf{x})$ uma função de $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ em \mathbb{R} , homogênea de grau zero e não constante, prove que não existe o $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} f(\mathbf{x})$.*

Exercício 4.27. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \ln \left(\frac{xy}{x+y} \right).$$

Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2, em torno do ponto $(1,1)$.

Solução:

$$\ln \frac{(1+h)(1+k)}{2+h+k} = -\ln 2 + \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}k + \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4}h^2 + \frac{1}{2}hk - \frac{3}{4}k^2 \right) + r_2(h, k).$$

Exercício 4.28. Seja $f(x, y) = \sin(x + y^2)$. Usando a fórmula de Taylor, aproxime f por um polinômio de grau 3, para (x, y) próximo de $(0, 0)$.

Solução: $\sin(x + y^2) \approx x + y^2 - \frac{x^3}{3!}, \forall (x, y) \in B_\varepsilon(0, 0)$.

5 Problemas de Otimização

Exercício 5.1. Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções de \mathbb{R}^2 em \mathbb{R}

a) $x^2 + y^2$	b) $x^2 - y^2$	c) $x^3 + y^3$
d) $x^3 - y^3$	e) $x^4 + y^4$	f) $x^4 - y^4$
g) $3xy - x^3 - y^3$	h) $x \ln x + y \ln y$	i) $x^3 + ye^y$
j) $2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$	k) $x^4 + y^4 - 4xy + 1$	l) x^2y^2
m) $(x^2 + y^2)e^{-y}$	n) $x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$	o) $2y^3 - 3x^2 - 6xy$
p) $(x^2 - y)(y - 1)$		

Solução: a) $(0, 0)$ é minimizante; b) $(0, 0)$ é ponto de sela; c) $(0, 0)$ é minimizante; d) $(0, 0)$ é ponto de sela; e) $(0, 0)$ é maximizante; f) $(0, 0)$ é ponto de sela; g) $(0, 0)$ é ponto de sela e $(1, 1)$ é maximizante; h) $(1/e, 1/e)$ é minimizante; i) $(0, -1)$ é ponto de sela; j) $(0, 0)$ é minimizante, $(-5/3, 0)$ é maximizante, $(-1, 2)$ e $(-1, -2)$ são pontos de sela; k) $(0, 0)$ é ponto de sela, $(1, 1)$ e $(-1, -1)$ são minimizantes; l) $(0, b)$ e $(a, 0) \forall a, b \in \mathbb{R}$, são minimizantes; m) $(0, 0)$ é minimizante e $(0, 2)$ é ponto de sela; n) $(0, 0)$ é ponto de sela, $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ são minimizantes; o) $(0, 0)$ é ponto de sela, $(1, -1)$ é maximizante; p) $(-1, 1)$ e $(1, 1)$ são pontos de sela, $(0, 1/2)$ é maximizante.

Exercício 5.2. Determine e classifique os pontos críticos das funções seguintes, em função do parâmetro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

a) $f(x, y) = e^{x^2 - ay^2}$	b) $f(x, y) = ax^2 - y^2$
c) $f(x, y) = x^3 - ax^2 - 3y^2$	d) $f(x, y) = \frac{16}{5}x^5 + ay^2 - x$

Solução: a) Ponto crítico: $(0, 0)$. Se $a < 0$, minimizante; se $a > 0$, ponto de sela. b) Ponto crítico: $(0, 0)$. Se $a > 0$, $(0, 0)$ é ponto de sela; se $a < 0$, $(0, 0)$ é maximizante. c) Pontos críticos: $(0, 0)$ e $(\frac{2a}{3}, 0)$. Se $a > 0$, $(0, 0)$ é maximizante e $(\frac{2a}{3}, 0)$ é ponto de sela; se $a < 0$, $(0, 0)$ é ponto de sela e $(\frac{2a}{3}, 0)$ é maximizante. d) Pontos críticos: $(-\frac{1}{2}, 0)$ e $(\frac{1}{2}, 0)$. Se $a < 0$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ maximizante e $(\frac{1}{2}, 0)$ é ponto de sela; se $a > 0$, $(-\frac{1}{2}, 0)$ é ponto de sela e $(\frac{1}{2}, 0)$ é minimizante.

Exercício 5.3. Considere a função $f(x, y) = (y - \alpha)xe^x$.

a) Sabendo que $(0, 1)$ é ponto crítico de f , determine α e classifique o ponto crítico $(0, 1)$.

b) Mostre que f não é limitada.

Solução: a) $\alpha = 1$. O ponto crítico é ponto de sela.

Exercício 5.4. Seja a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = 4\alpha(y - 2)^2 + (\beta^2 - 1)(2x - 2)^2$, onde $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 1$, $\beta \neq -1$. Mostre que $(1, 2)$ é o único ponto crítico de f e classifique-o em função dos possíveis valores de α e β .

Solução: Se $|\beta| < 1$ e $\alpha < 0$ então $(1, 2)$ é máximo local; se $|\beta| > 1$ e $\alpha > 0$ então $(1, 2)$ é mínimo local; nos restantes casos é ponto de sela.

Exercício 5.5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x^2 e^{y^3 - 3y}$.

- Determine os pontos críticos da função f .
- Mostre que a função f assume nos pontos da forma $(0, b)$ o seu mínimo absoluto.
- Justifique que
 - f não é limitada em \mathbb{R}^2 ;
 - f tem máximo e mínimo em $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$.

Solução: a) Pontos críticos: $(0, b)$ com $b \in \mathbb{R}$.

Exercício 5.6. Determine os extremos absolutos da função f no conjunto M , com

a) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

b) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\}$

c) $f(x, y) = xy$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1\}$

d) $f(x, y, z) = x^2 + 2y - 2z$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 8\}$

e) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 = 2\}$

f) $f(x, y, z) = 2x + 2y^2 + z^2$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

g) $f(x, y, z) = e^{-x^2 - y^2}$, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

h) $f(x, y) = 4xy - 2x^2 - 2y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

i) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}$

Solução: a) O valor máximo da função na superfície esférica é 3 e o mínimo é -3 ; b) O valor máximo da função na elipse é 2 e o mínimo é 1; c) O valor

máximo da função na elipse é 2 e o mínimo é -2 ; d) O valor máximo da função na superfície esférica é 10 e o mínimo é -8 ; e) O valor máximo da função na circunferência é 25 e o mínimo é 1; f) O valor máximo da função na superfície esférica é $9/2$ e o mínimo é $-2\sqrt{2}$. g) O valor máximo da função na superfície esférica é 1 e o mínimo é $1/e$; h) O valor máximo da função na circunferência é 0 e o mínimo é -4 ; i) O valor máximo da função na circunferência é 16 e o mínimo é 0

Exercício 5.7. Determine os extremos absolutos da função f no conjunto A , com

a) $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
(sugestão: compare com a alínea a) do exercício anterior)

b) $f(x, y) = 4x^2 + y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$
(sugestão: compare com a alínea b) do exercício anterior)

c) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - 3)^2 + y^2 \leq 2\}$
(sugestão: compare com a alínea e) do exercício anterior)

Solução: a) O valor máximo da função na esfera é 3 e o mínimo é -3 ; b) O valor máximo da função na região limitada pela elipse é 2 e o mínimo é 0; c) O valor máximo da função no círculo é 25 e o mínimo é 1.

Exercício 5.8. Determine as distâncias máxima e mínima da origem à elipse $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$.

Solução: A distância máxima é 2 e a distância mínima é 1.

Exercício 5.9. Resolva o problema $\min(x + 4y + 3z)$ sujeito à condição $x^2 + 2y^2 + \frac{1}{3}z^2 = b$, ($b > 0$).

Solução: O valor mínimo da função é $-6\sqrt{b}$, obtido no ponto $(-\frac{\sqrt{b}}{6}, -\frac{\sqrt{b}}{3}, -\frac{3\sqrt{b}}{2})$.

Exercício 5.10. Determine o ponto da elipse de equação $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$ que tem menor abscissa.

Solução: $(-2, 1)$.

Exercício 5.11. Determine os extremos absolutos da função $f(x, y, z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ no conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, z = 2 - y\}$.

Solução: O máximo da função é e^{10} , obtido no ponto $(0, -1, 3)$; o mínimo é e^2 , obtido em $(0, 1, 1)$.

Exercício 5.12. Semanalmente, um indivíduo trabalha L horas e consome dois bens em quantidades X e Y , respetivamente, sendo o seu nível de satisfação dado por

$$S(X, Y, L) = \frac{1}{4} \ln X + \frac{1}{4} \ln Y + \frac{1}{2} \ln(40 - L), \quad (X, Y, L > 0, L < 40).$$

O seu orçamento é determinado pelo número de horas que trabalha, de acordo com a restrição orçamental $2X + 4Y = 8L$.

a) Mostre que $S(X, Y, L)$ não tem extremos absolutos no conjunto $\Omega = \{(X, Y, L) \in \mathbb{R}^3 : X > 0, Y > 0, L > 0, L < 40\}$.

b) Sabendo que existe (X^*, Y^*, L^*) que é maximizante local de $S(X, Y, L)$ sujeita à restrição orçamental, determine-o.

Solução: $(X^*, Y^*, L^*) = (40, 20, 20)$.

6 Integrais Múltiplos

Exercício 6.1. Calcule os seguintes integrais

$$\begin{array}{ll}
 a) \int_0^1 \int_{-1}^1 \int_1^2 x \, dx \, dy \, dz & b) \int_{-1}^1 \int_0^1 y e^{xy} \, dx \, dy \\
 c) \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x-y-z} \, dx \, dy \, dz & d) \int_0^5 \int_0^{+\infty} (x^2 e^{-2yx} + 3y e^{-y^2}) \, dy \, dx \\
 e) \int_1^2 \int_1^2 (1+x+\frac{y}{2}) \, dx \, dy & f) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \cos x \, dx \, dy \, dz.
 \end{array}$$

Solução: a) 3 b) $e - \frac{1}{e} - 2$ c) 1 d) $\frac{55}{4}$ e) $\frac{13}{4}$ f) $\frac{1}{2}$

Exercício 6.2. Calcule $\iint_A f(x, y) \, dx \, dy$, onde

$$\begin{array}{ll}
 a) f(x, y) = \frac{2x}{y^6}, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 3, 0 \leq x \leq y^4\} \\
 b) f(x, y) = e^{\frac{y}{x}}, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, x \leq y \leq x^3\} \\
 c) f(x, y) = x^2 y^5, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\} \\
 d) f(x, y) = y e^x + x^2 y, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y^2\} \\
 e) f(x, y) = x e^{-xy}, & A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, \frac{1}{x} \leq y < +\infty\} \\
 f) f(x, y) = x^3 + 4y, & A \text{ é a região limitada por } y = x^2 \text{ e } y = 2x.
 \end{array}$$

Solução: a) $\frac{26}{3}$ b) $\frac{e^4}{2} - 2e$ c) $\frac{2}{45}$ d) $\frac{e}{2} - \frac{23}{24}$ e) $\frac{1}{e}$ f) $\frac{32}{3}$

Exercício 6.3. Sendo $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 1 - x, y \leq 1 + x, y \geq 0\}$, calcule

$$a) \iint_A (x-1)y \, dx \, dy \quad b) \iint_A (y-2y^2)e^{xy} \, dx \, dy \quad c) \iint_A (x+y) \, dx \, dy.$$

Solução: a) $-\frac{1}{3}$ b) 0 c) $\frac{1}{3}$

Exercício 6.4. Calcule

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x, y) \, dx \, dy, \text{ com } f(x, y) = \begin{cases} xy & x \geq 0 \text{ e } y \geq 0 \\ 1 - x - y, & \text{outros } (x, y) \end{cases}.$$

Solução: $\frac{17}{4}$

Exercício 6.5. Calcule com um integral duplo a área da figura plana que é imagem do conjunto A , sendo

- a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \wedge x^2 \leq y \leq 1\}$;
 b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x \leq y \leq 1 \wedge x \leq 1\}$;
 c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 2 - x^2\}$;
 d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y + 2 \geq 0 \wedge x + y^2 \leq 0\}$;
 e) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq x^2 \wedge y - x \geq 0 \wedge 2y - x \leq 3 \wedge x \geq 0\}$;
 f) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 1\}$;
 g) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 + x \leq 2 \wedge x - y \geq 0\}$;
 h) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \wedge x \leq \frac{y^2}{4} + 3\}$;

Solução: a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{8}{3}$ d) $\frac{9}{2}$ e) $\frac{35}{48}$ f) $\frac{\pi}{2}$ g) $\frac{9}{2}$ h) 8

Exercício 6.6. Calcule $\int_0^4 \int_{2x}^8 \sin(y^2) dy dx$ (sugestão: comece por fazer o esboço gráfico da região integranda, invertendo depois a ordem de integração).

Solução: $\frac{1 - \cos 64}{4}$

Exercício 6.7. Calcule $\iint_A g(x, y) dx dy$, sendo $A = [0, 2] \times [0, 4]$ e

$$g(x, y) = \begin{cases} x - y, & x \leq y \leq 2x \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Solução: $-\frac{4}{3}$

7 Equações Diferenciais Ordinárias

Exercício 7.1. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis

$$\begin{aligned} a) y' &= xy - x & b) dx e^y &= dy(x+1) - dx \\ c) \frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} &= 0 & d) \sqrt{1-x^2} dy - \sqrt{1-y^2} dx &= 0 \\ e) e^{x^4} yy' &= x^3(9+y^4) & f) e^y(4+x^2)y' &= x(2+e^y) \end{aligned}$$

Solução: a) $y(x) = 1 + e^{\frac{1}{2}x^2}C$ b) $\ln(e^{y(x)} + 1) - y(x) + \ln(x+1) = C$ c) $\frac{1}{3} \ln|1+y^3| + \ln|x| - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = C$ d) $\arcsin(y(x)) - \arcsin x = C$ e) $\frac{1}{6} \arctan\left(\frac{1}{3}y^2(x)\right) + \frac{1}{4}e^{-x^4} = C$ f) $\ln(2+e^{y(x)}) - \frac{1}{2} \ln(4+x^2) = C$

Exercício 7.2. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de 1ª ordem

$$\begin{aligned} a) y' - y &= 2xe^{x^2+x} & b) 4x^2y' + 8xy &= -12 \sin(3x) \\ c) x^2y' + 3xy &= 4e^{2x} & d) xy' &= 2x + 2y \end{aligned}$$

Solução: a) $y(x) = e^x(C + e^{x^2})$ b) $y(x) = (\cos(3x) + C)/x^2$ c) $y(x) = (e^{2x}(2x-1) + C)/x^3$ d) $y(x) = -2x + Cx^2$

Exercício 7.3. Mostre que qualquer equação diferencial ordinária linear de primeira ordem que seja homogênea, pode ser escrita como uma equação de variáveis separáveis.

Exercício 7.4. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{aligned} a) y' + 4y &= 0, y(0) = 6 & b) \frac{dy}{dt} + y \sin t &= 0, y(\pi/3) = 3/2 \\ c) y' \cos x + 2y \sin x &= \sin x, y(0) = 0 & d) (1+x^2)y' &= -2xy + 2, y(0) = 1 \\ e) (1+x^2)y' + y &= 0, y(1) = 1 & f) 2y' + 4xy &= 4x, y(0) = -2 \\ g) y' + y \sin x &= \sin x \cos x, y(\frac{\pi}{2}) = 0 & h) (1+x^2)y' &= 4x(1+y), y(0) = 1 \end{aligned}$$

Solução: a) $y(x) = 6e^{-4x}$ b) $y(t) = \frac{3}{2}e^{\cos t - \frac{1}{2}}$ c) $y(x) = (\cos^2 x - 1)/2$ d) $y(x) = \frac{2x+1}{1+x^2}$ e) $y(x) = e^{\frac{\pi}{4} - \arctan(x)}$ f) $y(x) = 1 - 3e^{-x^2}$ g) $y(x) = \cos x + 1 - e^{\cos x}$ h) $y(x) = 2(1+x^2)^2 - 1$.

Exercício 7.5. Determine a solução geral das equações seguintes

$$\begin{array}{lll}
 a) y'' - 7y' + 12y = 0 & b) y'' + 4y = 0 & c) y'' - 4y' + 4y = 0 \\
 d) y'' + 2y' + 10y = 0 & e) y'' + y' - 6y = 8 & f) y'' + 3y' + 2y = e^{5x} \\
 g) y'' - y = \sin x & h) y'' - y = e^{-x} & i) y'' - 6y = 36(x - 1) \\
 j) y'' - 9y = 9x^2 & k) y'' + 3y' + 2y = \sin x & l) y'' + 3y' + 2y = e^{-x} \\
 m) y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}
 \end{array}$$

Solução: a) $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}$ b) $y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$ c) $y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{2x}$ d) $y(x) = (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)e^{-x}$ e) $y(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x - \frac{4}{3}}$ f) $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + \frac{1}{42} e^{5x}$ g) $y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^x - \frac{1}{2} \sin x$ h) $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2} x e^{-x}$ i) $y(x) = C_1 e^{\sqrt{6}x} + C_2 e^{-\sqrt{6}x} - 6x + 6$ j) $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} - x^2 - \frac{2}{9}$ k) $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} - \frac{3}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x$ l) $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{-x} + x e^{-x}$ m) $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + 3x^2 e^{2x}$.

Exercício 7.6. Resolva os seguintes problemas de valor inicial

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} y'' + y' - 2y = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases} & b) \begin{cases} y'' + 2y' + 5y = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} \\
 c) \begin{cases} y'' + 2y' + y = x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 1 \end{cases} & d) \begin{cases} y'' + 4y = 4x + 1 \\ y(\frac{\pi}{2}) = 0, y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \end{cases} \\
 e) \begin{cases} 9y'' + y = 0 \\ y(\frac{3}{2}\pi) = 2, y'(\frac{3}{2}\pi) = 0 \end{cases} & f) \begin{cases} 2y'' - 4y' + 2y = 0 \\ y(0) = -1, y'(0) = 1 \end{cases} \\
 g) \begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 10x^2 \\ y(0) = 0, y'(0) = 3 \end{cases}
 \end{array}$$

Solução: a) $y(x) = -\frac{2}{3} e^{-2x} - \frac{1}{3} e^x$ b) $y(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) e^{-x}$ c) $y(x) = -(6 + x)e^{-x} + x^2 - 4x + 6$ d) $y(x) = \frac{2\pi+1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + x + \frac{1}{4}$ e) $y(x) = 2 \sin(\frac{x}{3})$ f) $y(x) = (-1 + 2x)e^x$ g) $y(x) = e^x (\frac{3}{25} \cos 3x + \frac{62}{75} \sin 3x) + x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$.

Exercício 7.7. Resolva os seguintes problemas de valores na fronteira

$$\begin{array}{ll}
 a) \begin{cases} y'' - 6y' + 9y = e^{3x} \\ y(0) = 0, y(1) = 0 \end{cases} & b) \begin{cases} y'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0, y(\pi) = 0 \end{cases} \\
 c) \begin{cases} y'' - 10y' + 25y = 50 \\ y(0) = 0, y(2) = 2. \end{cases} & d) \begin{cases} y'' - 8y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1, y(1) = e^4. \end{cases}
 \end{array}$$

Solução: a) $y(x) = (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2)e^{3x}$ b) $y(x) = C \sin 2x$ c) $y(x) = (-2 + x)e^{5x} + 2$ d) $y(x) = e^{4x}$.

Exercício 7.8. Resolva o seguinte problema com condições periódicas

$$\begin{cases} y'' + 4y = 4, \\ y(0) = y\left(\frac{\pi}{2}\right), y'(0) = y'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases} .$$

Solução: $y(x) = 1$.

Exercício 7.9. Sabendo que $y = e^{2x}$ é solução da equação diferencial

$$y'' - \alpha y' + 10y = 0, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

determine α e a solução geral da equação dada.

Solução: $\alpha = 7$; $y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}$.

Exercício 7.10. Sabendo que $y(x) = x e^{2x}$ é solução da equação diferencial $2y'' - \alpha y' + 8y = 0$, com $\alpha \in \mathbb{R}$, resolva o problema de valores na fronteira

$$\begin{cases} 2y'' - \alpha y' + 8y = 16 \\ y(0) = 1; y(1) = 2 \end{cases} .$$

Solução: $y(x) = -e^{2x} + x e^{2x} + 2$.

Exercício 7.11. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

a) $y' + y^2 \sin x = 0$

b) $yy' + x = 0$

c) $y'' - 2y' = 0$

d) $y'y - x(2y^2 + 1)e^{x^2} = 0$

e) $\frac{dy}{dx} \cos y = -x \frac{\sin y}{1+x^2}$

f) $y' + 6yx^5 - x^5 = 0$

g) $e^{3x} dy + (4 + y^2) dx = 0$

h) $4xe^y dx + (x^4 + 4) dy = 0$

Solução: a) $y^{-1}(x) = -\cos x + C$ b) $y^2(x) = -x^2 + C$ c) $y(x) = C_1 + C_2 e^{2x}$
d) $\frac{1}{4} \ln(2y^2 + 1) - \frac{1}{2} e^{x^2} = C$ e) $\ln |\sin y| + \frac{1}{2} \ln(1+x^2) = C$ f) $y(x) = \frac{1}{6} + C e^{-x^6}$
g) $\frac{1}{2} \arctan\left(\frac{1}{2}y(x)\right) - \frac{1}{3} e^{-3x} = C$ h) $-e^{-y(x)} + \arctan \frac{1}{2} x^2 = C$.

Exercício 7.12. Determine os valores de a e b para os quais e^{2x} e e^{-2x} são solução da equação diferencial $y'' + ay' + by = 0$ e, para esses valores de a e b , indique a solução geral da equação dada.

Solução: $a = 0$ e $b = -4$; $y_h(x) = A e^{2x} + B e^{-2x}$, $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercício 7.13. Considere um modelo económico onde Q_S e Q_D designam, respetivamente, a oferta e a procura de um bem, sendo as relações entre estas quantidades e o preço de mercado, $P(t)$, definidas por

$$Q_S = a_0 + a_1 P(t) + a_2 P'(t) + a_3 P''(t)$$

$$Q_D = b_0 + b_1 P(t) + b_2 P'(t) + b_3 P''(t),$$

onde $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ com $a_3 \neq b_3$ e $a_1 \neq b_1$.

a) Assumindo que $Q_D = Q_S$ para qualquer $t > 0$, mostre que o nível de preço satisfaz a equação diferencial

$$P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) = \gamma, \quad t > 0 \quad (1)$$

b) Determine a solução da equação anterior que satisfaz as condições iniciais $P(0) = 10, P'(0) = 0$, para os valores de $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ e $\gamma = 1$.

c) Proponha valores para α, β de modo a que o nível de preço $P(t)$ seja periódico ao longo do tempo (sazonal).

Solução:

$$a) Q_S = Q_D \Leftrightarrow P''(t) + \underbrace{\left(\frac{a_2 - b_2}{a_3 - b_3}\right)}_{=\alpha} P'(t) + \underbrace{\left(\frac{a_1 - b_1}{a_3 - b_3}\right)}_{=\beta} P(t) = \underbrace{\left(\frac{b_0 - a_0}{a_3 - b_3}\right)}_{=\gamma}$$

b) $P(t) = 8e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \frac{t}{2} + \sin \frac{t}{2}\right) + 2$. c) Se $\alpha = 0$ e $\beta > 0$, $P(t) = C_1 \cos(\sqrt{\beta}t) + C_2 \sin(\sqrt{\beta}t) + 2$, é periódica de período $\frac{2\pi}{\beta}$.

Aplicações de equações diferenciais

Exercício 7.14 (Lei do crescimento da população segundo Verhulst). a) Deduza a trajetória da população, $y(t)$, sabendo que: i) em cada instante t , a taxa de crescimento da população, $\frac{dy}{y}$, é igual a r menos ay (r : taxa de crescimento natural; a : “taxa de emigração” ou “morte”; com $r > 0$ e $a > 0$); ii) no momento $t = 0$ registam-se y_0 (milhões de indivíduos).

b) Estime o valor da população portuguesa no ano 2025 supondo que no ano de 2015 (por hipótese $t = 0$) se regista $y = 10.358$ (milhões de indivíduos) e que $r = -0.00229$ e $a = 0.00033$.

c) Estude $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$.

Exercício 7.15 (Modelo de Crescimento de Domar). Considere um modelo económico onde: i) a procura agregada da economia, y_d , varia ao longo do tempo de acordo com a equação $\frac{dy_d}{dt} = \frac{dI}{dt} \frac{1}{s}$, sendo $I = I(t)$ o investimento e s a propensão marginal a poupar ($1/s$ é o multiplicador keynesiano); ii) a capacidade produtiva ($y_c = \rho K$ - note: a capacidade produtiva depende apenas do stock de capital) varia ao longo do tempo de acordo com a equação $\frac{dy_c}{dt} = \rho \frac{dK}{dt}$, sendo $K = K(t)$ o stock de capital da economia (naturalmente $\frac{dK}{dt} = I(t)$). Deduza a trajetória do investimento, $I(t)$, que satisfaz a condição de equilíbrio no modelo de Domar: variação da procura agregada = variação da capacidade produtiva.

Exercício 7.16. Considere as seguintes funções, procura e oferta de um bem: $Q_d = a - bP$; $Q_s = -c + dP$.

a) Determine a trajetória temporal do nível de preços $P(t)$ sabendo que, em cada instante t , a taxa de variação de $P(t)$ é proporcional ao excesso de procura, i.e., $\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s)$ e que $P(0) = P_0 \neq P_e = (a + c)/(b + d)$ (preço de equilíbrio).

b) Verifique em que condições $\lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = P_e$.