1 Complementos de Álgebra Linear

Exercício 1.1 *Para cada uma das matrizes seguintes, calcule os valores próprios e, se forem reais, determine os vetores próprios correspondentes, identificando em cada caso as multiplicidades algébrica e geométrica*

a) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$ *b)* $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ *c)* $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e)* $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *f)* $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

g) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *h)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *i)* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Exercício 1.2 *Prove que*

a) λ *é um valor próprio de* A *sse for valor próprio de* A^T*;*

b) se λ *for valor próprio de* A *e* $|A| \neq 0$*, então* $\lambda \neq 0$ *e* $\frac{1}{\lambda}$ *é valor próprio da matriz inversa* A^{-1}*;*

c) se λ *for valor próprio de* A *então* λ^k *é valor próprio da matriz* $A^k,\ k \in \mathbb{N}$.

d) se $\boldsymbol{u}$ *e* $\boldsymbol{v}$ *forem vetores próprios de* A *associados a um mesmo valor próprio* λ*, então* $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ *e* $t\boldsymbol{u}$ *também são vetores próprios de* A *associados ao mesmo* λ*,* $\forall t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

Exercício 1.3 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

a) Calcule os valores próprios de A *e os respetivos vetores próprios;*

b) Determine os valores próprios e vetores próprios de A^{100} *(sugestão: use um dos resultados enunciados no exercício anterior).*

Exercício 1.4 *Considere a matriz* A *e o vetor* $\boldsymbol{x}$ *definidos por*

$$A = \begin{bmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

a) Identifique o polinómio característico, $P(\lambda)$*, associado à matriz* A*;*

b) Determine os valores próprios de A*;*

c) Calcule $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$*;*

d) Sejam $a, b \geq 0$*. Sem efetuar qualquer cálculo, mostre que existe um vetor* $\mathbf{x}$ *não nulo, para o qual* $\mathbf{x}^T A\mathbf{x} = 0$*;*

e) Classifique $\mathbf{x}^T A\mathbf{x}$ *para todos os possíveis valores de* $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercício 1.5 *Classifique as seguintes formas quadráticas*

a) $q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$
b) $q(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$
c) $q(x,y) = x^2 - y^2$
d) $q(x,y,z) = x^2 + 4xy - 2xz + 7y^2 - 3z^2$
e) $q(x,y,z) = x^2 - 4xy + 4xz - z^2$
f) $q(x,y) = 6x^2 + 4xy + 3y^2$
g) $q(x,y) = x^2 + 4xy + y^2$
h) $q(x,y) = 2x^2 + 6xy + 4y^2$
i) $q(x,y,z) = 3y^2 + 4xz$
j) $q(x,y) = x^2 + 4xy + ay^2$ *(onde $a \in \mathbb{R}$).*

Exercício 1.6 *Classifique as seguintes matrizes simétricas (quanto a serem definidas positivas, semi-definidas positivas, negativas, semi-definidas negativas ou indefinidas)*

$$a) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad b) \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad c) \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & a \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \qquad e) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad f) \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$g) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \qquad h) \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & a & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \qquad i) \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$j) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

2 Generalidades sobre Funções de Várias Variáveis

Exercício 2.1 *Determine os domínios das seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ e represente-os graficamente*

$$a) f(x,y) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{1 - \ln x} \qquad b) f(x,y) = \frac{\sqrt{e - e^x}}{\ln(4 - x^2 - y^2)}$$

$$c) f(x,y) = \ln{(x-y)^2} \qquad d) f(x,y) = \frac{\sqrt[3]{x+y}}{\ln x^2 - \ln{(3-x)^2}}$$

$$e) f(x,y) = \ln(x-y)\sqrt{(y-x)(x^2+y^2-1)}$$

Exercício 2.2 *Determine os domínios das seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^3$*

$$a)(x,y) = \left(\frac{\sqrt{x+y}}{x-y}, x^2y, \ln\left(x^2-y\right)\right)$$
$$b)(x,y) = \left(\ln(xy)^2, \frac{1}{\ln(2x+y)}, \sqrt{x+y}\right)$$

3 Limites e Continuidade

Exercício 3.1 *Determine o interior, exterior e fronteira de cada um dos seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Classifique-os relativamente a serem abertos, fechados e limitados.*

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y+2)^2 < 4\}$$

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 9\}$$

$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \leq 1\}$$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1\}$$

Exercício 3.2 *Represente graficamente o domínio D_f, indique analiticamente $int(D_f)$, $fr(D_f)$, $ad(D_f)$ e D'_f e diga, justificando, se D_f é aberto ou fechado, se é limitado e se é compacto, para cada uma das seguintes funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$:*

$$a)f(x,y) = \frac{|x|-4}{\ln(4-x^2-y^2)}$$

$$b)f(x,y) = \sqrt{x(1-x)} + \frac{\ln(x^2-y)}{\sqrt{y+x}}$$

$$c)f(x,y) = \sqrt{y+x-1}.\ln(4-(x+1)^2-(y-1)^2)$$

$$d)f(x,y) = \sqrt{x-|y|} + \sqrt{2-y^2-x}$$

$$e)f(x,y) = x\sqrt{y^2-4} + \sqrt[4]{16-x^2-y^2}$$

Exercício 3.3 *Determine o domínio da função f de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{\ln(x^2+y^2-4)}{|x|-4}.$$

Faça a sua representação gráfica e mostre que D_f é um conjunto aberto e ilimitado. Averigue se $ext(D_f)$ também é aberto e ilimitado.

Exercício 3.4 *Determine o interior, a fronteira, a aderência e os pontos de acumulação dos seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^2$

$$a) A = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$$

$$b) B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}\}$$

$$c) C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y = (-1)^n \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Exercício 3.5 *Calcule os seguintes limites de sucessões de pontos em* $\mathbb{R}^2$ *(caso existam):*

$$\text{a) } \lim \left(\left(\frac{2n^2+3}{1+2n^2} \right)^{n^2}, \ln \left(\frac{2n}{2n+1} \right)^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$\text{b) } \lim \left(n^3 + n - n^2 - 1), \sqrt{n} \frac{\sqrt{n}+3}{(\sqrt{n}+1)^2} \right)$$

$$\text{c) } \lim \left(n \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right), \sin \frac{n\pi}{2} \right)$$

Exercício 3.6 *Calcule, caso exista,* $\lim \overline{x}_n$ *com:*

$$a)\ \bar{x}_n = \left[\tfrac{n}{2n+1},\ \left(1 + \tfrac{2}{n}\right)^n,\ \ln\left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n \right]$$

$$b)\ \bar{x}_n = \left[\sqrt{n} - \sqrt{n-1},\ n\,(\sqrt[n]{e} - 1)\,,\ n \ln \tfrac{n+2}{n},\ \left(1 - \tfrac{n^2}{n^2+1}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\tfrac{n^2+1}{2n^2}\right)^{\frac{1}{3}} \right]$$

Exercício 3.7 *Estude a existência dos seguintes limites*

$$a) \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \qquad b) \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1}{(x-1)(y-2)}$$

$$c) \lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{1}{x^2+y^2} \qquad d) \lim_{(x,y)\to(0,0)} \ln(x^2+y^2)$$

$$e) \lim_{(x,y)\to(0,1)} e^{xy}$$

Exercício 3.8 *Estude a existência de limite no ponto (0,0) para as seguintes funções*

a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x(x+y)}$

b) $f(x,y) = \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}$

c) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

d) $f(x,y) = xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$

e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

f) $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$

g) $f(x,y) = \dfrac{x^2(x+y)}{x^2 + y^2}$

h) $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2 + 2x^3}{x^2 + y^2}$

i) $$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x}\sqrt{x^2+y^2}, & \textit{se } x > 0,\ y > 0 \\ 0, & \textit{se } x < 0 \textit{ ou } y < 0. \end{cases}$$

Exercício 3.9 *Determine, caso exista, o prolongamento por continuidade à origem de cada uma das funções do exercício anterior.*

Exercício 3.10 *Estude a existência dos seguintes limites*

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{(x-2)(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,-3)} \frac{\sin{(x-1)(y+3)}}{\sqrt{(x-1)(y+3)}}$

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{3(x-2)^2(y-1)}{(x-2)^2 + (y-1)^2}$

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + y^2}{x}$

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{x^2 - y^2 - 1}{x - 1}$

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y + x^2 + y^2}{x^2 + y^2}$

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x^2\sqrt{|y-1|}}{x^2 + (y-1)^2}$

h) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$

Exercício 3.11 *Considere a função f de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x - y}.$$

a) Indique o domínio de f.
b) Mostre que $x^3 - y^3$ é múltiplo de $x - y$.
c) Pode a função f ser prolongada por continuidade à reta $y = x$?

Exercício 3.12 *Considere a função* $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2-y^2}$.

a) Calcule $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ y=x+x^2}} f(x,y)$. *O que pode concluir sobre* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

b) Calcule $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0),\\ y=mx}} f(x,y)$, $|m| \neq 1$. *O que pode concluir sobre* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *?*

Exercício 3.13 *Seja* $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ *uma função definida por*

$$\mathbf{f}(x,y) = \left(\frac{x^2y + x^2 + y^2}{x^2+y^2}, xy+2, \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} \right).$$

Estude a existência de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \mathbf{f}(x,y)$.

4 Cálculo Diferencial

Exercício 4.1 *Determine as derivadas parciais de primeira ordem de cada uma das seguintes funções e defina os respetivos domínios:*

a) $f(x,y,z) = 3xy + x^2 - zy + z^2$; b) $f(x,y) = \begin{cases} x^2 - yx, & y \neq x \\ x, & y = x. \end{cases}$

Exercício 4.2 *Mostre que* $f(x,y) = \dfrac{x-y+1}{x+y}$ *é solução da equação*

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{x+y}$$

em qualquer dos semiplanos abertos $x + y > 0$ *ou* $x + y < 0$.

Exercício 4.3 *Considere a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{x-y} - (x-y+1)}{x-y}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de $f(x,y)$ *no ponto (1,1).*
b) Verifique que $f'_x(a,a) + f'_y(a,a) = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}$.

Exercício 4.4 *Dada a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & , x = y = 0 \end{cases},$$

indique segundo que vetores existe derivada na origem e calcule o seu valor.

Exercício 4.5 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

a) Mostre que a função admite derivada na origem segundo qualquer vetor e calcule-a.
b) Mostre também que f *não é contínua em* $(0,0)$.
c) Sem fazer qualquer cálculo, indique o valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e de* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Exercício 4.6 *Estude a diferenciabilidade das seguintes funções nos pontos indicados e escreva as expressões dos respetivos diferenciais de primeira ordem (no caso das funções diferenciáveis):*

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, *no ponto (0,0)*;

b) $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x \neq y \\ x+1, & x = y \end{cases}$, *em (1,1)*;

c) $f(x,y) = \begin{cases} xy - 2y + 3x, & x \neq y \\ x^2y^2 + 3x - 2y, & x = y \end{cases}$, *em (0,0)*;

d) $\mathbf{y}(x) = (x^2+1, x)$, *em* $x = 1$;

Exercício 4.7 *Escreva as expressões do diferencial de primeira ordem das seguintes funções nos pontos indicados:*

a) $f(x,y) = y^x$, *num ponto genérico* (a,b), *com* $b > 0$;

b) $f(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{x_1 - x_2 + x_3}{\sqrt{x_3 - 1}}$, *no ponto (1,-3,2).*

Nota: Admita à partida que as funções são diferenciáveis.

Exercício 4.8 *Mostre que são contínuas e que não são diferenciáveis nos pontos indicados, as funções*

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{-3x(y-2)^2 + x^3}{x^2 + (y-2)^2}, & se\ (x,y) \neq (0,2) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,2) \end{cases}$, *em* $(0,2)$;

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & se\ x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & se\ x = y = 0, \end{cases}$, *em* $(0,0)$;

c) $h(x,y) = \sqrt{|x|}\cos y$, *em* $(0,0)$.

Exercício 4.9 *Utilize a regra da derivação da função composta para calcular*

a) $\dfrac{df}{dt}$, *onde* $f = x^2y^3$, *sendo* $x = te^t$ *e* $y = t^2+1$;

b) $\dfrac{df}{dt}$, *onde* $f = u^2 + v^3$, *sendo* $u = \dfrac{x}{y}$, $v = (x+2y)^3$ *e* $x = \dfrac{1}{t}$, $y = tg\ t$;

c) $\dfrac{dz}{dt}$, *supondo que* $z = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ *e* $x = \cos t$, $y = \sin t$.

d) $\nabla f(1,1)$, *onde* $f(x,y)=\sin(2u-v^3+w)$, *sendo* $u=e^{x^2-y}$, $v=xy^2$ *e* $w=x^3y^2$*;*

e) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1,1)$, *onde* $f(x,y,z)=(u^2-3v)^5$, *com* $u=e^{\frac{xy}{z}}$ *e* $v=\ln(y^2z^3)$*;*

f) $\nabla f(1,2,3)$, *onde* $f(x,y,z)=g(u,v,w)$, *com* $u=5x+3z$, $v=8x+2y$, $w=-y+z$ *e sabendo que* $\nabla g(14,12,1)=(4,5,6)$.

Exercício 4.10 *Se a função* $f(u,v,w)$ *é diferenciável no ponto* $u=x-y$, $v=y-z$ *e* $w=z-x$, *prove que, com* $F(x,y,z)=f(x-y,y-z,z-x)$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial F}{\partial z}\equiv 0.$$

Exercício 4.11 *Dada a função*

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)^2y^2}{(x-1)^2+y^2}, & (x,y)\neq(1,0)\\[2ex] 0, & (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

a) Determine as funções derivadas $g'_x(x,y)$ *e* $g'_y(x,y)$*, indicando onde são definidas.*

b) Mostre que $g'_x(x,y)$ *e* $g'_y(x,y)$ *são funções contínuas em* $\mathbb{R}^2$.

c) Estude a diferenciabilidade da função no ponto (1,0).

d) Estude a continuidade da função no ponto (1,0).

Exercício 4.12 *Seja* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0, & \text{se } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ *e mostre que é descontínua em (0,0).*

c) Verifique que f *é diferenciável na origem.*

d) Calcule $\partial_{(\frac{3}{5},\frac{4}{5})}f(0,0)$.

e) Estude a continuidade de f *na origem.*

Exercício 4.13 *Utilize a função*

$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{y}, & y\neq 0\\[2ex] 0, & y=0\end{cases}$$

e o ponto (0,0) para mostrar que o facto de uma função ter derivadas parciais finitas num ponto não significa que seja contínua nesse ponto. A função dada será diferenciável no ponto (0,0)? Justifique.

Exercício 4.14 *Considere a função definida em* $\mathbb{R}^2$ *por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Prove que f é contínua em (0,0).

b) Determine $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

c) Verifique que f não é diferenciável em (0,0). Sem fazer cálculos, o que pode concluir sobre a continuidade de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *em (0,0)?*

Exercício 4.15 *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *a função definida por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x-y)}{x+y} & se\ x+y \neq 0 \\ \\ 0 & se\ x+y = 0 \end{cases}$$

a) Estude a continuidade de f no ponto $(0,0)$ *(sugestão: calcule o limite segundo a parábola de equação* $y = -x + x^2$*).*

b) Calcule a função derivada parcial $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ *e estude a sua continuidade em (0,0).*

c) Estude a diferenciabilidade de f em $(0,0)$.

d) Mostre que $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0), \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) . \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq \partial_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(0,0)$. *Comente esse resultado.*

Exercício 4.16 *Calcule* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ *e* $\dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial z \partial y}$, *para* $f(x,y,z) = z^2x^2y + xye^z$.

Exercício 4.17 *Calcule* f''_{x^2}, f''_{xy} *e* f'''_{xyx} *para cada uma das seguintes funções, indicando os respetivos domínios:*

$$a)\ f(x,y) = x\sin(x+y); \qquad b)\ f(x,y) = \begin{cases} y\sin x, & y \neq 0 \\ \\ 2, & y = 0 \end{cases}$$

Exercício 4.18 *Calcule a segunda, terceira e quarta diferenciais de* $f(x,y) = \sqrt{xy}$ *no ponto (1,1).*

Exercício 4.19 *Escreva a expressão geral da n-ésima diferencial da função* $f(x,y) = \sin(x+y)$ *no ponto (0,0).*

Exercício 4.20 *Mostre que* $f(x,y) = \ln(e^x + e^y)$ *satisfaz a equação diferencial*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)^2 = 0$$

em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$*.*

Exercício 4.21 *Seja* $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ *uma função real tal que* $\dfrac{\partial f}{\partial u}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(0,0) = 1$*. Seja* $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $g(x,y) = f(y \sin x, y^2)$*.*

Mostre que a matriz hessiana de g *em* $(0,0)$ *é* $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercício 4.22 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x,y) = xy^2 + g(u,v,w), \text{ com } u = sen\, y^2, \ v = \ln x \text{ e } w = ye^x.$$

Sabendo que a função g *é de classe* $C^2(\mathbb{R}^3)$*, calcule* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(1,0)$*.*

Exercício 4.23 *Mostre que as funções seguintes são homogéneas ou positivamente homogéneas. Determine o grau de homogeneidade e verifique a identidade de Euler:*

a) $f(x,y) = \ln \dfrac{(x+y)^2}{xy}$

b) $f(x,y,z) = \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z^2}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2}\right), & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

Exercício 4.24 *Estude a homogeneidade de* $g(x,y,z) = x^2 + x^\alpha y^{\beta-3} - z^{3\alpha} y^\beta$ *e de* $h(x,y) = \dfrac{x^3y^\alpha + x^{\beta-1}}{y^{3-\beta}}$*, fazendo a discussão em função dos parâmetros* α *e* β *reais:*

a) Recorrendo diretamente à definição.
b) Utilizando a identidade de Euler.

Exercício 4.25 *Sendo* $g(u,v)$ *diferenciável em* $\left(\dfrac{x}{y}, \dfrac{z}{x}\right)$*, com* $x, y \neq 0$*, prove que a função*

$$f(x,y,z) = x^2.g\left(\frac{x}{y}, \frac{z}{x}\right),$$

verifica a identidade $x.f'_x + y.f'_y + z.f'_z \equiv 2.f$*. Interprete este resultado em termos de homogeneidade.*

Exercício 4.26 *Sendo* $f(\mathbf{x})$ *uma função de* $\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ *em* $\mathbb{R}$*, homogénea de grau zero e não constante, prove que não existe o* $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{0}} f(\mathbf{x})$*.*

Exercício 4.27 *Considere a função* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x, y) = \ln\left(\frac{xy}{x+y}\right).$$

Escreva a fórmula de Taylor de ordem 2, em torno do ponto (1,1).

Exercício 4.28 *Seja* $f(x, y) = \sin(x + y^2)$*. Usando a fórmula de Taylor, aproxime* f *por um polinómio de grau 3, para* (x, y) *próximo de* $(0, 0)$*.*

5 Problemas de Otimização

Exercício 5.1 *Determine e classifique os pontos críticos das seguintes funções de* $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathbb{R}$

$a)x^2+y^2$	$b)x^2-y^2$	$c)x^3+y^3$
$d)x^3-y^3$	$e)x^4+y^4$	$f)x^4-y^4$
$g)3xy-x^3-y^3$	$h)x\ln x+y\ln y$	$i)x^3+ye^y$
$j)2x^3+xy^2+5x^2+y^2$	$k)x^4+y^4-4xy+1$	$l)x^2y^2$
$m)(x^2+y^2)e^{-y}$	$n)x^4+y^4-2(x-y)^2$	$o)2y^3-3x^2-6xy$
$p)(x^2-y)(y-1)$		

Exercício 5.2 *Determine e classifique os pontos críticos das funções seguintes, em função do parâmetro* $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$a)f(x,y)=e^{x^2-ay^2}$	$b)f(x,y)=ax^2-y^2$
$c)f(x,y)=x^3-ax^2-3y^2$	$d)f(x,y)=\frac{16}{5}x^5+ay^2-x$

Exercício 5.3 *Considere a função* $f(x,y)=(y-\alpha)\,xe^x$.

a) Sabendo que $(0,1)$ *é ponto crítico de* f*, determine* α *e classifique o ponto crítico* $(0,1)$.

b) Mostre que f *não é limitada.*

Exercício 5.4 *Seja a função* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y)=4\alpha(y-2)^2+(\beta^2-1)(2x-2)^2$*, onde* $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 1,\ \beta\neq -1$*. Mostre que* $(1,2)$ *é o único ponto crítico de* f *e classifique-o em função dos possíveis valores de* α *e* β.

Exercício 5.5 *Considere a função* $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ *definida por* $f(x,y)=x^2e^{y^3-3y}$.

a) Determine os pontos críticos da função f.

b) Mostre que a função f *assume nos pontos da forma* $(0,b)$ *o seu mínimo absoluto.*

c) Justifique que

(i) f *não é limitada em* $\mathbb{R}^2$*;*

(ii) f *tem máximo e mínimo em* $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9\}$.

Exercício 5.6 *Determine os extremos absolutos da função* f *no conjunto* M*, com*

$a) f(x,y,z) = x - 2y + 2z, \qquad M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$b) f(x,y) = 4x^2 + y^2, \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 = 1\}$

$c) f(x,y) = xy, \qquad M = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1\right\}$

$d) f(x,y,z) = x^2 + 2y - 2z, \qquad M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 8\}$

$e) f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2, \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 = 2\}$

$f) f(x,y,z) = 2x + 2y^2 + z^2, \qquad M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

$g) f(x,y,z) = e^{-x^2-y^2}, \qquad M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$

$h) f(x,y) = 4xy - 2x^2 - 2y^2, \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

$i) f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2, \qquad M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 8\}$

Exercício 5.7 *Determine os extremos absolutos da função f no conjunto A, com*

$a) f(x,y,z) = x - 2y + 2z, \quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
(sugestão: compare com a alínea a) do exercício anterior)

$b) f(x,y) = 4x^2 + y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 \leq 1\}$
(sugestão: compare com a alínea b) do exercício anterior)

$c) f(x,y) = x^2 + 2xy + y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-3)^2 + y^2 \leq 2\}$
(sugestão: compare com a alínea e) do exercício anterior)

Exercício 5.8 *Determine as distâncias máxima e mínima da origem à elipse* $5x^2+6xy+5y^2 = 8$.

Exercício 5.9 *Resolva o problema* $\min\,(x + 4y + 3z)$ *sujeito à condição* $x^2+2y^2+\frac{1}{3}z^2 = b$, $(b > 0)$.

Exercício 5.10 *Determine o ponto da elipse de equação* $x^2 + 2xy + 2y^2 = 2$ *que tem menor abcissa.*

Exercício 5.11 *Determine os extremos absolutos da função* $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$ *no conjunto* $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1,\ z = 2 - y\}$.

Exercício 5.12 *Semanalmente, um indivíduo trabalha L horas e consome dois bens em quantidades X e Y, respetivamente, sendo o seu nível de satisfação dado por*

$$S(X,Y,L) = \frac{1}{4}\ln X + \frac{1}{4}\ln Y + \frac{1}{2}\ln(40-L), \quad (X,Y,L>0, L<40).$$

O seu orçamento é determinado pelo número de horas que trabalha, de cordo com a restrição orçamental $2X+4Y=8L$.

a) Mostre que $S(X,Y,L)$ não tem extremos absolutos no conjunto $\Omega = \{(X,Y,L) \in \mathbb{R}^3 : X>0, Y>0, L>0, L<40\}$.

b) Sabendo que existe (X^*, Y^*, L^*) que é maximizante local de $S(X,Y,L)$ sujeita à restrição orçamental, determine-o.

6 Integrais Múltiplos

Exercício 6.1 *Calcule os seguintes integrais*

$$a)\int_0^1\int_{-1}^1\int_1^2 x\,dxdydz \qquad b)\int_{-1}^1\int_0^1 ye^{xy}dxdy$$

$$c)\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-x-y-z}dxdydz \quad d)\int_0^5\int_0^{+\infty}(x^2e^{-2yx}+3ye^{-y^2})dydx$$

$$e)\int_1^2\int_1^2(1+x+\frac{y}{2})dxdy \qquad f)\int_0^1\int_0^1\int_0^{\frac{\pi}{2}} y\cos x\,dxdydz.$$

Exercício 6.2 *Calcule* $\iint_A f(x,y)dxdy$*, onde*

$a) f(x,y)=\frac{2x}{y^6}, \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le y\le 3,\ 0\le x\le y^4\}$

$b) f(x,y)=e^{\frac{y}{x}}, \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2,\ x\le y\le x^3\}$

$c) f(x,y)=x^2y^5, \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le x\le 1,\ x^2\le y\le 1\}$

$d) f(x,y)=ye^x+x^2y, \quad A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}$

$e) f(x,y)=xe^{-xy}, \quad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1\le x\le 2,\ \frac{1}{x}\le y<+\infty\right\}$

$f) f(x,y)=x^3+4y,$ $\quad A$ *é a região limitada por* $y=x^2$ *e* $y=2x$.

Exercício 6.3 *Sendo* $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le 1-x,\ y\le 1+x,\ y\ge 0\}$*, calcule*
a) $\iint_A(x-1)y\,dxdy$ *b)* $\iint_A(y-2y^2)e^{xy}\,dxdy$ *c)* $\iint_A(x+y)\,dxdy.$

Exercício 6.4 *Calcule*

$$\int_{-1}^1\int_{-1}^1 f(x,y)dxdy,\ com\ f(x,y)=\begin{cases} xy & x\ge 0\ e\ y\ge 0\\ 1-x-y, & outros\ (x,y)\end{cases}.$$

Exercício 6.5 *Calcule com um integral duplo a área da figura plana que é imagem do conjunto A, sendo*

a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -1\le x\le 1\ \wedge\ x^2\le y\le 1\}$;
b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1-x\le y\le 1\ \wedge\ x\le 1\}$;
c) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le 2-x^2\}$;
d) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y+2\ge 0\ \wedge\ x+y^2\le 0\}$;
e) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\le x^2\ \wedge\ y-x\ge 0\ \wedge\ 2y-x\le 3\ \wedge\ x\ge 0\}$;
f) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\ge 0\ \wedge\ x^2+y^2\le 1\}$;
g) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2+x\le 2\ \wedge\ x-y\ge 0\}$;
h) $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y^2\le x\ \wedge\ x\le \frac{y^2}{4}+3\right\}$;

Exercício 6.6 *Calcule* $\int_0^4 \int_{2x}^8 \sin(y^2) dy dx$ *(sugestão: comece por fazer o esboço gráfico da região integranda, invertendo depois a ordem de integração).*

Exercício 6.7 *Calcule* $\iint_A g(x,y) dx dy$*, sendo* $A = [0,2] \times [0,4]$ *e*

$$g(x,y) = \begin{cases} x - y, & x \leq y \leq 2x \\ \\ 0, & \textit{caso contrário} \end{cases} .$$

7 Equações Diferenciais Ordinárias

Exercício 7.1 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais de variáveis separáveis*

a) $y' = xy - x$ *b)* $dx\, e^y = dy(x+1) - dx$

c) $\frac{dy}{dx} + \frac{1+y^3}{xy^2(1+x^2)} = 0$ *d)* $\sqrt{1-x^2}dy - \sqrt{1-y^2}dx = 0$

e) $e^{x^4} yy' = x^3\left(9+y^4\right)$ *f)* $e^y(4+x^2)y' = x\left(2+e^y\right)$

Exercício 7.2 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais lineares de 1ª ordem*

a) $y' - y = 2xe^{x^2+x}$ *b)* $4x^2y' + 8xy = -12\sin(3x)$

c) $x^2y' + 3xy = 4e^{2x}$ *d)* $xy' = 2x + 2y$

Exercício 7.3 *Mostre que qualquer equação diferencial ordinária linear de primeira ordem que seja homogénea, pode ser escrita como uma equação de variáveis separáveis.*

Exercício 7.4 *Resolva os seguintes problemas de valor inicial*

a) $y' + 4y = 0,\ y(0) = 6$ b) $\dfrac{dy}{dt} + y\sin t = 0,\ y(\pi/3) = 3/2$

c) $y'\cos x + 2y\sin x = \sin x,\ y(0) = 0$ d) $(1+x^2)y' = -2xy + 2,\ y\,(0) = 1$

e) $(1+x^2)y' + y = 0,\ y(1) = 1$ f) $2y' + 4xy = 4x,\ y\,(0) = -2$

g) $y' + y\sin x = \sin x\cos x,\ y(\frac{\pi}{2}) = 0$ h) $(1+x^2)y' = 4x(1+y),\ y\,(0) = 1$

Exercício 7.5 *Determine a solução geral das equações seguintes*

a)$y'' - 7y' + 12y = 0$ *b)*$y'' + 4y = 0$ *c)*$y'' - 4y' + 4y = 0$

d)$y'' + 2y' + 10y = 0$ *e)*$y'' + y' - 6y = 8$ *f)*$y'' + 3y' + 2y = e^{5x}$

g)$y'' - y = \sin x$ *h)*$y'' - y = e^{-x}$ *i)*$y'' - 6y = 36(x-1)$

j)$y'' - 9y = 9x^2$ *k)*$y'' + 3y' + 2y = \sin x$ *l)*$y'' + 3y' + 2y = e^{-x}$

m)$y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x}$

Exercício 7.6 *Resolva os seguintes problemas de valor inicial*

$$a)\begin{cases} y''+y'-2y=0 \\ y(0)=-1, y'(0)=1 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y''+2y'+5y=0 \\ y(0)=0, y'(0)=1 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} y''+2y'+y=x^2 \\ y\left(0\right)=0,\ y'\left(0\right)=1 \end{cases} \qquad d)\begin{cases} y''+4y=4x+1 \\ y(\frac{\pi}{2})=0,\ y'(\frac{\pi}{2})=0 \end{cases}$$

$$e)\begin{cases} 9y''+y=0 \\ y\left(\frac{3}{2}\pi\right)=2,\ y'\left(\frac{3}{2}\pi\right)=0 \end{cases} \qquad f)\begin{cases} 2y''-4y'+2y=0 \\ y(0)=-1, y'(0)=1 \end{cases}$$

$$g)\begin{cases} y''-2y'+10y=10x^2 \\ y(0)=0, y'(0)=3 \end{cases}$$

Exercício 7.7 *Resolva os seguintes problemas de valores na fronteira*

$$a)\begin{cases} y''-6y'+9y=e^{3x} \\ y\left(0\right)=0,\ y\left(1\right)=0 \end{cases} \qquad b)\begin{cases} y''+4y=0 \\ y\left(0\right)=0,\ y\left(\pi\right)=0 \end{cases}$$

$$c)\begin{cases} y''-10y'+25y=50 \\ y\left(0\right)=0,\ y\left(2\right)=2. \end{cases} \qquad d)\begin{cases} y''-8y'+16y=0 \\ y\left(0\right)=1,\ y\left(1\right)=e^4. \end{cases}$$

Exercício 7.8 *Resolva o seguinte problema com condições periódicas*

$$\begin{cases} y''+4y=4, \\ y\left(0\right)=y\left(\frac{\pi}{2}\right), y'\left(0\right)=y'\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}.$$

Exercício 7.9 *Sabendo que $y=e^{2x}$ é solução da equação diferencial*

$$y''-\alpha y'+10y=0, \quad \alpha\in\mathbb{R},$$

determine α e a solução geral da equação dada.

Exercício 7.10 *Sabendo que $y\left(x\right)=xe^{2x}$ é solução da equação diferencial $2y''-\alpha y'+8y=0$, com $\alpha\in\mathbb{R}$, resolva o problema de valores na fronteira* $\begin{cases} 2y''-\alpha y'+8y=16 \\ y\left(0\right)=1;\ y\left(1\right)=2 \end{cases}.$

Exercício 7.11 *Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:*

$$a) y'+y^2\sin x=0 \qquad b) yy'+x=0$$

$$c) y''-2y'=0 \qquad d) y'y-x(2y^2+1)e^{x^2}=0$$

$$e) \frac{dy}{dx}\cos y=-x\frac{\sin y}{1+x^2} \qquad f) y'+6yx^5-x^5=0$$

$$g) e^{3x}dy+\left(4+y^2\right)dx=0 \qquad h) 4xe^y dx+\left(x^4+4\right)dy=0$$

Exercício 7.12 *Determine os valores de a e b para os quais* e^{2x} *e* e^{-2x} *são solução da equação diferencial* $y'' + ay' + by = 0$ *e, para esses valores de a e b, indique a solução geral da equação dada.*

Exercício 7.13 *Considere um modelo económico onde* Q_S *e* Q_D *designam, respetivamente, a oferta e a procura de um bem, sendo as relações entre estas quantidades e o preço de mercado,* $P(t)$*, definidas por*

$$\begin{aligned} Q_S = &\quad a_0 + a_1 P(t) + a_2 P'(t) + a_3 P''(t) \\ Q_D = &\quad b_0 + b_1 P(t) + b_2 P'(t) + b_3 P''(t), \end{aligned}$$

onde $a_0, a_1, a_2, a_3, b_0, b_1, b_2, b_3 \in \mathbb{R}$ *com* $a_3 \neq b_3$ *e* $a_1 \neq b_1$.

a) Assumindo que $Q_D = Q_S$ *para qualquer* $t > 0$*, mostre que o nível de preço satisfaz a equação diferencial*

$$P''(t) + \alpha P'(t) + \beta P(t) = \gamma, \quad t > 0 \tag{1}$$

b) Determine a solução da equação anterior que satisfaz as condições iniciais $P(0) = 10, P'(0) = 0$*, para os valores de* $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ *e* $\gamma = 1$.

c) Proponha valores para α, β *de modo a que o nível de preço* $P(t)$ *seja periódico ao longo do tempo (sasonal).*

Aplicações de equações diferenciais

Exercício 7.14 (Lei do crescimento da população segundo Verhulst) *a) Deduza a trajetória da população,* $y(t)$*, sabendo que: i) em cada instante t, a taxa de crescimento da população,* $\dfrac{dy/y}{dt}$*, é igual a r menos ay (r: taxa de crescimento natural; a: "taxa de emigração" ou "morte"; com* $r > 0$ *e* $a > 0$*); ii) no momento* $t = 0$ *registam-se* y_0 *(milhões de indivíduos).*

b) Estime o valor da população portuguesa no ano 2025 supondo que no ano de 2015 (por hipótese $t = 0$*) se regista* $y = 10.358$ *(milhões de indivíduos) e que* $r = -0.00229$ *e* $a = 0.00033$.

c) Estude $\lim\limits_{t \to \infty} y(t)$.

Exercício 7.15 (Modelo de Crescimento de Domar) *Considere um modelo económico onde: i) a procura agregada da economia,* y_d*, varia ao longo do tempo de acordo com a equação* $\dfrac{dy_d}{dt} = \dfrac{dI}{dt}\dfrac{1}{s}$*, sendo* $I = I(t)$ *o investimento e s a propensão marginal a poupar (*$1/s$ *é o multiplicador keynesiano); ii) a capacidade produtiva (*$y_c = \rho K$ *- note: a capacidade produtiva depende apenas do stock de capital) varia ao longo do tempo de acordo com a equação* $\dfrac{dy_c}{dt} = \rho\dfrac{dK}{dt}$*, sendo* $K = K(t)$ *o stock de capital da economia (naturalmente* $\dfrac{dK}{dt} = I(t)$*). Deduza a trajetória do investimento, I(t), que satisfaz a condição de equilíbrio no modelo de Domar: variação da procura agregada = variação da capacidade produtiva.*

Exercício 7.16 *Considere as seguintes funções, procura e oferta de um bem:* $Q_d = a - bP$*;* $Q_s = -c + dP$*.*

a) Determine a trajetória temporal do nível de preços $P(t)$ *sabendo que, em cada instante* t*, a taxa de variação de* $P(t)$ *é proporcional ao excesso de procura, i.e.,* $\frac{dP}{dt} = \alpha(Q_d - Q_s)$ *e que* $P(0) = P_0 \neq P_e = (a+c)/(b+d)$ *(preço de equilíbrio).*

b) Verifique em que condições $\lim_{t\to\infty} P(t) = P_e$*.*