Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática I – 1º ano MAEG

LISTA 11

(1) Determine se os seguintes integrais convergem:
   (a) $\int_0^{+\infty} \sin(3x)\,dx$
   (b) $\int_2^{+\infty} (x^2-3)^{-1}\,dx$
   (c) $\int_1^{+\infty} x^{-3/2}|\sin(x)|\,dx$
   (d) $\int_2^{+\infty} \frac{x^2+4x+1}{(x^2+3)^2(\sqrt{x}+1)}\,dx$
   (e) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-4}\,dx$
   (f) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x-2)^2(x+4)}\,dx$

(2) Estude, quanto à convergência, os seguintes integrais, em função do valor de α e β (sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).
   (a) $\int_0^{+\infty}(x^\alpha + x^\beta)^{-1}dx$;
   (b) $\int \int_{-1}^{+\infty} x.(1+x^4)^\beta dx$;
   (c) $\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}dx$;
   (d) $\int_0^1 (1-x)^\beta . \sin(1-x)\,dx$;

(3) Seja $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ positiva e contínua, e $\psi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\psi(x) = \int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt.$$

   (a) Estude o sinal de ψ.
   (b) Justifique que ψ é diferenciável e calcule ψ'.
   (c) Prove que ψ é estritamente decrescente em $\mathbb{R}^-$.
   (d) Mostre que ψ tem um mínimo global m e

$$|m| \leq \frac{1}{4} \max_{[0,1]} \varphi.$$

(4) Mostre que se $f \in C^0([a,b])$ e $\int_a^b f = 0$, então f tem pelo menos uma raíz.

Sugestão: Use o Teorema de Rolle para a primitiva.

(5) Calcule a área limitada pelas curvas definidas pelas seguintes equações: $y^2 = -4(x-1)$ e $y^2 = -2(x-2)$