Análise Matemática III

LISTA 10

(1) Seja $f\colon E \to \mathbb{R}$ mensurável com $E \in \mathcal{M}$ tal que $m(E) < +\infty$. Considerando a função $\omega\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\omega(x) = m\left(\{y \in E\colon f(y) > x\}\right),$$

determine:

(a) $\lim_{x\to+\infty} \omega(x)$

(b) $\lim_{x\to-\infty} \omega(x)$

(c) a monotonia de ω

(d) $\lim_{x\to a^+} \omega(x)$

(e) $\lim_{x\to a^-} \omega(x)$

(f) se $m(f^{-1}(\{a\}) = 0$ implica que ω é contínua em a.

(2) Seja $\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ a aplicação dada por

$$\mu(\emptyset) = 0, \quad \mu(\mathbb{R}) = 2, \quad \mu(X) = 1 \quad \text{se} \quad X \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset, \mathbb{R}\}.$$

Mostre que μ é uma medida exterior sobre $\mathbb{R}$ e que os únicos conjuntos mensuráveis são $\emptyset$ e $\mathbb{R}$.

(3) Mostre que se μ_1, μ_2 são medidas e $\alpha, \beta \geq 0$, então $\mu = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2$ também é uma medida.

(4) Para $a \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$, considere a medida de Dirac

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Prove que:

(a) δ_a é uma medida em $\mathbb{R}^n$.

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\delta_a = \varphi(a)$ onde φ é uma função simples.

(c) $\int_{\mathbb{R}^n} f \, d\delta_a = f(a)$ onde $f \geq 0$.