Matemática I - 2008/2009

Ficha de exercícios n^o 9

Álgebra Linear

Exercícios do livro *Sydsaeter, Knut e Hammond, Peter J., Mathematics for Economic Analysis, Prentice Hall, 2003*:

12.2: 1-8
12.4: 2-5
12.6: 1-5
12.7: 1-3
12.8: 1, 4, 5, 6, 7
12.9: 1-5, 7
13.1: 1, 4, 5
13.2: 1, 2, 4
13.3: 1
13.4: 4, 8, 9
13.5: 1, 2
13.6: 1, 3
13.7: 1, 2
14.1: 1-5
14.2: 1-3
14.3: 1, 2, 3, 5, 6

Exercício 1 *Determine os valores de a para os quais a matriz* $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & 1-a & a \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *tem como determinante o valor* -12.

Exercício 2 *Prove que a inversa de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *é* $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ \frac{8}{7} & -1 & \frac{3}{7} \\ -\frac{2}{7} & 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$.

Exercício 3 *Usando as operações elementares, determine as matrizes inversas de*

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

Exercício 4 *Discuta a existência de soluções para os sistemas que se seguem determinando, sempre que possível, o número de graus de liberdade e as soluções.*

a) $\begin{cases} -2x - 3y + z = 3 \\ 4x + 6y - 2z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x - y + 2z + w = 1 \\ 2x + y - z + 3w = 3 \\ x + 5y - 8z + w = 1 \\ 4x + 5y - 7z + 7w = 7 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z + w = 0 \\ x + 3y + 2z + 4w = 0 \\ 2x + y - w = 0 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ -x - y + 2z = 0 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases}$

Exercício 5 *Indique, justificando, se as afirmações seguintes são verdadeiras ou falsas:*

a) Um sistema de equações lineares com igual número de equações e de incógnitas tem uma única solução.

b) Um sistema de equações lineares com igual número de equações e de incógnitas tem pelo menos uma solução.

c) Um sistema de equações lineares com mais equações do que incógnitas pode ter uma infinidade de soluções

d) Um sistema de equações lineares com menos equações do que incógnitas pode não ter solução.

Exercício 6 *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. *Indique a proposição verdadeira:*

a) A característica de A é igual a 3.

b) As duas colunas de A são linearmente dependentes.

c) As duas colunas de A são linearmente independentes.

d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

Exercício 7 *Considere os seguintes vectores de* $\mathbb{R}^3$*:*

$$\overline{u}_1 = (-1, 2, 3), \overline{u}_2 = (1, -1, 2), \overline{u}_3 = (4, -6, -2).$$

Indique a resposta correcta:

a) Os três vectores são linearmente independentes.

b) Os vectores são ortogonais dois a dois.

c) O vector $\overline{u}_3$ é combinação linear dos vectores $\overline{u}_1$ e $\overline{u}_2$.

d) Nenhuma das respostas anteriores está correcta.

Exercício 8 *Classifique os sistemas em função dos valores dos parâmetros* a, b *e* c.

a) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ x - y - z = a \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x - y + z = 1 \\ 2x - 2y + az = 2 \end{cases}$ c) $\begin{cases} y + az = 0 \\ x + by = 0 \\ by + az = 1 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + 2z = a \\ 2x + bz = 2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x + y = b \\ 3x + 2y + z = 0 \\ x + ay + z = 2 \end{cases}$ f) $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ ax + z = 2 \\ 3x + y + 3z = 6 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y = a \\ x + 2y = a^2 \\ x + 3y = a^3 \end{cases}$ h) $\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ x + az = 1 \\ x + y + 2z = b \\ 2x - y + (a+2)z = 2 \end{cases}$ i) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -x - y + bz = -b - 1 \\ x + 3y + 2bz = a \end{cases}$

Exercício 9 *Resolva os sistemas do exercício anterior para:*

a) $a \in \mathbb{R}$

b) $a = 2$

c) $a = 1, b = 2$

d) $a = 1, b = 3$

e) $a = b = 0$

f) $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

g) $a = 1$

h) $a = 2, b = 1$

i) $a = -1, b = 2$

Exercício 10 *Seja $Ax = b$ um sistema com 4 equações e 5 incógnitas. sabendo que o sistema tem dois graus de liberdade, indique a característica da matriz A:*

a) 2 b) 3 c) 4 d) 1