Instituto Superior de Economia e Gestão
Matemática II
Licenciatura em Economia/Finanças/Gestão
3 de Janeiro de 2012, Época Normal
Duração: 2h

(3,0) 1. Considere a função de $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\ln(x-1)\sqrt{9-(x-1)^2-y^2}}{e^{x+y}}.$$

(a) Determine o domínio de f, D_f, e represente-o geometricamente.

(b) Defina analiticamente a fronteira de D_f e indique, justificando, se D_f é um conjunto compacto.

(1,5) 2. Resolva a equação diferencial $y'' - 4y = e^{3x}$.

(5,5) 3. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 \sin(x-1)}{(x-1)^2+y^2} & \text{se } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

(a) Prove que a função f é contínua em $(1,0)$.

(b) Calcule o valor de $\partial_{(v_1,v_2)} f(1,0)$ para $(v_1,v_2) = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$.

(c) Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(1,0)$.

(2,5) 4. Dado $k \in \mathbb{R}^+$ considere equação diferencial $y' = 3x^2y + ky$.

(a) Determine a função diferenciável $y(x)$ solução da equação anterior que verifica $y(0) = 3$.

(b) Sabendo que e^{x^3+x} é solução da equação calcule o valor de k.

(3,0) 5. Considere a função $f(x,y) = xy(x-1)$. Determine e classifique os pontos críticos de f.

(2,0) 6. Sendo R a região do plano limitada pelas rectas $y = -2x + 1$, $y = x + 1$ e $y = 3$, use um integral duplo para calcular a área de R.

(2,5) 7. Dada $g : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g \in C^1(D)$, uma função homogénea de grau -1, considere a função f definida por $f(x,y) = x.g(x,y)$. Prove que, para todo o ponto $(x,y) \in D$, se tem

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$