Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II

Época Normal - 30 de Maio de 2012

Duração: 2 horas

As respostas devem ser devidamente justificadas.

Grupo I

Cotações: **1)** 1,5; **2) a)** 2; **b)** 1; **3) a)** 1; **b)** 1; **c)** 1,5; **d)** 2; **4)** 2.

1. Classifique a forma quadrática $Q(x,y,z) = -2x^2 + 2xy - 4y^2 - 3z^2$.

2. Considere a funcão $f\,(x,y) = \dfrac{\sqrt{y+x}\ \ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-4}}$.

a) Determine analiticamente o domínio de f, D_f e apresente o esboço gráfico respectivo.

b) Indique analiticamente a fronteira de D_f.

3. Considere a função $z = f(x,y) = 4xe^{x^2 y}$. Calcule:

a) o gradiente de f, ∇f;

b) a derivada de f no ponto $(2,0)$ segundo o vector $\mathbf{u} = (-1,1)$;

c) $\frac{dz}{dt}(\frac{\pi}{2})$, sabendo que $x = \cos(2t)$ e $y = \sin(2t)$, usando a derivada da função composta

d) $\int\int_A y\, f(x,y)dxdy$ onde $A = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq \ln 2\}$.

4. Determine a solução geral da equação diferencial

$$y''(x) + 10y'(x) + 9y(x) = 66\, e^{2x}.$$

Grupo II

Cotações: **1)** 2; **2)** 2; **3)** 2; **4)** 2.

1. Determine, caso exista, o prolongamento por continuidade a $\mathbf{R}^2$ da função

$$f(x,y) = \frac{(x-2)^3 \sin y}{(x-2)^2 + y^2}.$$

2. Seja $k \in \mathbf{R}$. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = e^{-x^2 - k\,y^2}$ em função do parâmetro k.

3. Determine o máximo e mínimo (absolutos) da função $f(x,y) = x^2 + 3y^2$ na circunferência $C = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 - 2x + y^2 = 3\}$.

4. Seja $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função limitada. Prove que a função

$$g(x,y) = x + y + (x^2 + y^2)f(x,y)$$

é diferenciável na origem.