Universidade Técnica de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

MATEMÁTICA II

Época de Recurso - 29 de Junho de 2012

Duração: 2 horas

As respostas devem ser devidamente justificadas.

Grupo I

Cotações: **1)** 1,5; **2) a)** 2; **b)** 1; **3) a)** 1; **b)** 1; **c)** 1,5; **4) a)** 2; **b)** 2 .

1. Classifique a forma quadrática
$Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + 3yz + z^2$.

2. Considere a funcão $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{x^2 - y + 5}}{\sqrt{6 - |x|}\ln(x^2 + y^2 - 1)}$.

a) Determine analiticamente o domínio de f, D_f e apresente o esboço gráfico respectivo.

b) Indique analiticamente o interior de D_f e diga, justificando, se D_f é aberto ou fechado.

3. Calcule para a função dada por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{4-x^2-2y^2}, \ se\ x^2 + 2y^2 \neq 4 \\ \\ 0, \ se\ x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$$

a) o gradiente de f no ponto $(1, 1)$, $\nabla f(1, 1)$;

b) a derivada de f no ponto $(1, 1)$ segundo o vector $\mathbf{u} = (-1, 1)$;

c) o gradiente de f no ponto $(2, 0)$, $\nabla f(2, 0)$, caso exista.

4. a) Calcule $\int\int_A (e^{4y} + xy)dxdy$ onde $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge 0 \leq y - x \wedge 0 \leq 2x - y\}$.

b) Determine a solução da equação diferencial $y'(x) + xy(x) = 4x$ que satisfaz a condição $y(0) = 8$.

Grupo II

Cotações: **1) a)** 1; **b)** 1; **2)** 2; **3)** 2; **4)** 2.

1. Sabendo que é contínua a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2x^2y^2}{x^2+y^2}, \ se\ (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 4 - k^2, \ se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine k.

b) Sabendo que ambas as derivadas parciais em (0,0) são nulas, mostre que a função f é diferenciável em $(0, 0)$.

2. Determine e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9x$.

3. Determine o máximo e mínimo (absolutos) da função $f(x, y, z) = x^2 + x + 2y^2 + 3z^2$ na esfera unitária $C = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

4. Seja $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}$ uma função homogénea de grau α. Sabendo que $g : \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$ e $h : \mathbf{R}^p \longrightarrow \mathbf{R}$ são funções homogéneas de grau β, averigue se a função $F(x, y) = f(g(x), h(y))$ definida em $\mathbf{R}^{m+p}$ é homogénea e, em caso afirmativo, indique o grau de homogeneidade respectivo.