Universidade de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

Matemática II

Época Normal 13 de janeiro de 2015 Duração: 2 horas

---

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Mostre que $\lambda = 0$ é valor próprio da matriz A e calcule os vetores próprios associados.

b) Escreva a expressão da forma quadrática definida pela matriz A e classifique-a.

2. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}\,\ln(x+2-y)}{y-1}$.

a) Defina analiticamente o domínio de f, D_f, e represente-o graficamente.

b) Determine a aderência de D_f, $ad(D_f)$, e averigue se D_f é um conjunto compacto.

3. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{-y}}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

a) Estude a continuidade de f em $(0,0)$.

b) Calcule, caso exista, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$. O que pode concluir sobre a diferenciabilidade de f em $(0,0)$?

4. Determine e classifique todos os pontos críticos de $f(x,y) = x^2y - 3y^2 + 4xy$.

5. Calcule $\iint_A 6x\, e^{(1-y)^3}\, dx\, dy$, sendo A a região do 1º quadrante limitada pelas linhas $x = 0, y = 0$ e $x + y = 1$.

6. Resolva as equações diferenciais

a) $y'' - y' - 6y = 18x^2$

b) $y'y = \frac{e^{-y^2}\, x^3}{1+x^4}$.

7. Considere a função $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^1 em $\mathbb{R}^2$ e tal que

$$f(x,y) = xg(u,v), \text{ com } u = e^{x^2}y \quad \text{e} \quad v = \ln(x^2+y^2+1).$$

Mostre que $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = g(e, \ln 3) + 3e\frac{\partial g}{\partial u}(e, \ln 3) + \frac{4}{3}\frac{\partial g}{\partial v}(e, \ln 3)$.

Cotacão: **1.a)**2,0 **b)**1,0 **2.a)**1,5 **b)**1,5 **3.a)**2,0 **b)**1,5 **4.** 2,5 **5.** 2,0 **6.a)**2,0 **b)**1,5 **7.** 2,5