Universidade de Lisboa

Instituto Superior de Economia e Gestão

Licenciaturas em Economia, Finanças e Gestão

Matemática II

Época de Recurso 26 de janeiro de 2015 Duração: 2 horas

NOTA: justifique convenientemente todas as suas respostas

---

1. Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & b \\ 0 & a & -2 \\ b & -2 & 2 \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Determine os valores de a e de b tais que $(0,-1,2)$ seja vetor próprio de A;

b) Dê exemplo de valores de a e de b para os quais
(i) A é definida positiva (ii) A é definida negativa (iii) A é indefinida,
ou mostre que não existem tais valores.

2. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \ln(4 - x^2 - y^2) - \sqrt{x+y-1}$.

a) Defina analiticamente o domínio de f, D_f, e represente-o graficamente;

b) Determine o interior e a fronteira de D_f. O conjunto D_f é aberto? É limitado?

3. Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \frac{(x-2)y}{(x-2)^2+y^2}$.
Indique o domínio da função f e verifique se f admite prolongamento por continuidade a $\mathbb{R}^2$.

4. Determine os extremos absolutos de $f(x,y) = 6y - (x-1)^2$ nos pontos do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25\}$.

5. Calcule o integral $\iint_D \left(x^2y - \frac{\sin y}{x}\right) dx\, dy$, onde $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 3, 0 \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$.

6. Resolva

a) o problema de valor inicial $y'' - 3y' - 4y = 4x$, $y(0) = \frac{3}{4}$ e $y'(0) = 4$;

b) a equação diferencial $y' = \frac{y}{x^2+2x+1}$, com $x > -1$.

7. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de classe C^2 em $\mathbb{R}^2$ e cujo vetor gradiente no ponto $(0,1)$ é $(3,-5)$. Mostre que $t = 0$ é um ponto crítico de $g(t) = f\ (t^2, t^3 + 1)$ e averigúe se se trata de um extremante local de g. Em caso afirmativo, classifique-o.

Cotacão: **1.a)**1,5 **b)**2,0 **2.a)**1,5 **b)**2,0 **3.**2,5 **4.** 2,0 **5.** 2,0 **6.a)**2,0 b)1,5 **7.**3,0