Universidade Técnica de Lisboa – ISEG

Departamento de Matemática

Análise Matemática III – 2º ano MAEG

1º Semestre 2009/2010

EXAME FINAL 6 Janeiro 2010

Duração máxima: 2 horas

Cada alínea vale 2 valores

Sem consulta, sem calculadora

(1) Considere o conjunto

$$M = \left\{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \colon ad - bc = 1\right\}$$

e a função $\varphi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi(a,b,c,d) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2.$$

(a) Mostre que M é uma variedade diferencial e determine a sua dimensão.

(b) Determine os espaços tangente e normal a M no ponto $(1,0,0,1)$.

(c) Prove que $\varphi \geq 2$ em M.
Sugestão: Encontre o mínimo de φ em M.

(2) Calcule:

(a) os pontos de

$$A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 = y^2 + z^2,\ 2x + z = 2\right\}$$

mais próximos e mais distantes da origem.

(b) o centróide de

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon x^2 + z^2 \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}.$$

(c) o integral

$$\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-xy} e^{-y/x}\, \frac{y}{x}\, dx\, dy.$$

Sugestão: Use o teorema de Fubini.

(d) o integral

$$\int_V \mathrm{div} f$$

onde $f(x,y,z) = \big(-y\sin^2(x+y), x\sin^2(x+y), z\big)$ e

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon 0 < x - y < 1,\ 0 < x + y < 1,\ 0 < z < 1\}.$$

(3) Seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \mathbb{N}^2 \colon \omega_1, \omega_2 \in \{0, \ldots, 9\}\}$$

e $A_i = \{\omega \in \Omega \colon \omega_1 = i\}$ para $i \in \{0, \ldots, 9\}$.

(a) Determine a σ-álgebra gerada pelo conjunto $\mathcal{A} = \{A_0, A_1\}$ denotada por $\sigma(\mathcal{A})$.

(b) Considere a aplicação $\mu \colon \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\mu(A) = \frac{\#A}{\#\Omega},$$

onde $\#B$ indica o número de elementos de um qualquer conjunto B. Mostre que μ é uma medida de probabilidade.

(4) Dado $q \in]0,1[$, mostre que a função μ definida em subconjuntos A de $\mathbb{N}$ por

$$\mu(A) = \sum_{n \in A} (1-q) q^{n-1},$$

define uma medida de probabilidade em $\mathbb{N}$.