INSTITUTO SUPERIOR DE ECONOMIA E GESTÃO, UTL
Matemática 1, 2009/2010 - 1º Semestre
Exame de Época Normal, 11 de Janeiro de 2010 Duração: 2 horas

Nome: ____

Nº de Aluno: ________ Curso: ____________________ Classificação: ________

Pergunta	I.1	I.2	I.3	I.4	Total
Cotação	1.0	1.0	1.0	1.0	4.0
Class.					

Pergunta	II.1a	II.1b	II.1c	II.2a	II.2b	II.2c	II.2d	II.2e	II.3a	II.3b	II.3c	II.3d	II.3e	II.4	Total
Cotação	2.0	1.0	0.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.0	1.0	1.0	1.0	1.5	1.5	16.0
Class.															

PARTE I: Perguntas de escolha múltipla (4 valores)

Cada resposta correcta vale 1,0 valores e cada resposta incorrecta é penalizada em 0,5 valores.
A cotação mínima na primeira parte é de zero valores.

1. O determinante $\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & -x & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \end{vmatrix}$ é igual a:

☐ 0 ☐ x^2yz

☐ $-x^2yz$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

2. O valor de $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x + x^2}{2x^2}$ é

☐ $1/2$ ☐ 0

☐ $3/4$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

3. A série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{2x+3}{2}\right)^n$ converge para:

☐ $\dfrac{-2}{1+2x}$ se $-\dfrac{5}{2} < x < -\dfrac{1}{2}$ ☐ $\dfrac{2}{1-x}$ se $-1 < x < 1$

☐ $\dfrac{2}{1+2x}$ se $-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{1}{2}$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

4. Seja $f(x) = -\frac{1}{3}\, x^k\, g(x)$, com g uma função real diferenciável em todo o seu domínio e $k \in \mathbb{R}$. A elasticidade $El_x f(x)$ é igual a:

☐ $\dfrac{1}{3}k + El_x g(x)$ ☐ $k + El_x g(x)$

☐ $-k + El_x g(x)$ ☐ Nenhuma das respostas anteriores está correcta

PARTE II: Perguntas de desenvolvimento (16 valores)

Justifique cuidadosamente todas as suas respostas.

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ \beta \\ -1 \end{bmatrix}$ e $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Classifique o sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ em função dos valores de α e β, indicando, nos casos adequados, o número de graus de liberdade.
   (b) Resolva este sistema para $\alpha = -4$ e $\beta = -1$.
   (c) Para que valores de α as linhas da matriz A constituem um conjunto de vectores linearmente independentes?

2. Considere a função $f(x) = x \sin x$.
   (a) Calcule o polinómio de Taylor de segunda ordem de f em torno do ponto 0.
   (b) A função f tem um único ponto de estacionariedade no intervalo aberto $]-1; 1[$. Determine-o.
   (c) Classifique o ponto de estacionariedade obtido na alínea anterior através do estudo da segunda derivada.
   (d) Existem outros pontos de extremo de f no intervalo $]-1; 1[$? Justifique a resposta.
   (e) Calcule uma primitiva da função f.

3. Seja a função $f(x) = \begin{cases} e^{x} & \text{se } x < 0 \\ e^{-kx} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$, com $k > 0$.
   (a) Indique o domínio de f e discuta a continuidade da função.
   (b) Recorrendo à definição de derivada, estude a diferenciabilidade de f no ponto $x = 0$.
   (c) Mostre que a função f é invertível no intervalo aberto $]0; +\infty[$.
   (d) Sendo g a função inversa de f em $]0; +\infty[$, calcule $g'(\frac{1}{k})$.
   (e) Calcule a área compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas.

4. Sejam $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ diferenciáveis e $a \in \mathbb{R}$. Demonstre que $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_a^{g(x)} f(t)dt = f[g(x)] \cdot \dfrac{dg}{dx}(x)$, apresentando explicitamente os cálculos que levam a esse resultado.